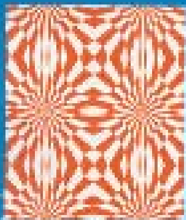


代数曲线



内 容 简 介

本书是根据美国科学院院士、著名数学家P·格列菲斯在北京大学讲课的讲稿整理写成的。本书篇幅虽不大，但内容丰富，阐述精练，引人入胜。书中深入浅出地介绍了正则化定理、Riemann-Roch定理、Abel定理等代数曲线论的重要结果，以及这些定理的应用和重要的几何事实。读者只要具有大学复变函数论和抽象代数的基础知识即可阅读此书。

本书可作为大学数学系高年级学生和研究生教材，也可供数学工作者参考。

北京大学数学丛书

代 数 曲 线

P·格列菲斯 著

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京燕山印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

850×1168毫米　32开本　7.625印张　188千字

1985年6月第一版　　1985年6月第一次印刷

印数：1—15,000册

*

统一书号：13209·104　定价：精装3.10元　平装1.85元

说　明

此丛书是以数学、計算数学、概率统計及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物。丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期周学时为3的研究生课程的取材。我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的数学质量贡献一份力量。

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考。

《北京大学数学丛书》编委会
一九八一年元月



序　言

1. 作者个人的说明

1982年夏天，我荣幸地在北京大学讲授了一个关于代数曲线的课程。这课程进行了六周，每周六学时，本书是由课堂笔记经过全面重新整理写成的。

在代数几何这一学科的研究之中，代数曲线和紧Riemann面是发展得最成熟并且或许还是最精采的论题。不幸的是，这方面已经写出的大多数著述，都分别地去讲述代数曲线与紧Riemann面，把它们分别视为更一般的理论的一部分。这样就不得不花费许多时间分别去铺述各方面的基本的材料。此外，曲线论的初等课本和大学生的教程，几乎总是以Riemann-Roch定理为终结。其实代数曲线论正是从这一定理开始才真正进入了引人入胜的部分。

在北京大学讲授这一课程时，我决定从最低限度的技术工具准备开始，直接通往基本的Riemann-Roch定理和Abel定理。特别是，我希望能够留下时间去应用这些结果，因为从这里开始人们才真正看到了代数曲线是怎样的。由于学生们的极好的质量和他们的刻苦努力，我感到这样的目的在很大程度上是达到了。本书的目录准确地反映了在课堂上讲述的内容。

在结束这一部分说明的时候，作者以极其愉快的心情感谢北京大学数学系邀请我讲述代数曲线的课程；感谢听这一课程的学生们为我提供了这样一个令人鼓舞的机会；感谢课程的助手张筑生、赵春来和周青，他们做了非常杰出的工作——从课堂笔记整理成本书；感谢吴宪，他对笔记的英文稿进行了极认真的校对并做了订正。



2. 一般的说明

这是一本论述代数曲线的书，只假定读者熟悉初等的复函数论和代数。它不同于这方面许多新近的著述之点在于：从一开始就将解析的方法与几何的方法融为一体，以便于使读者最有效地得到这一领域的基本结果。虽然这使得我们能够很早就讨论有趣的几何结果(这里，我愿再一次强调，Riemann-Roch定理应是代数曲线研究的真正开始，而绝不是其终结)，这种处理方式也有一些缺点，其中主要的是：沒有引入在一般代数几何研究中所需要的层论、上同调、可换代数、多复变、Hermite微分几何等技术工具。然而，理解了本书之后，大学生将有可能去研究关于一般代数几何、复流形、黎曼曲面，以及代数曲线的更进一步的著述，以下仅仅举例式地选出了其中一小部分。

一般代数几何

1. Algebraic Geometry, by R.Hartshorne.
   (采取代数方法的一本极好的书，要求较强的交换代数基础。)
2. Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties, by D. Mumford.
   (直观地解释许多现代概念的一本很好的引论。)
3. Elementary Algebraic Geometry, by K. Kendig.
   (另一很好的引论。)
4. Principles of Algebraic Geometry by P. Griffiths and J.Harris.
   (解析的方法同时强调几何的实例。)
5. Introduction to Algebraic Geometry, by J. Semple and L. Roth
   (经典代数几何的一个非常好的表述。)



复流形

1. Complex Manifolds without Potential Theory, by S. S. Chern.
   （一个极好的导引。）
2. Differential Analysis on Real and Complex Manifolds, by R. O. Wells.
   （一本有用的参考书。）
3. Analysis on Real and Complex Manifolds, by R. Narasimhan.
   （许多基本论题的极好的表述。）
4. Complex Manifolds by K. Kodaira and J Marrow
   （包含了形变理论的一个很有价值的讨论。）
5. Several Complex Variables by R. Gunning and H. Rossi.
   （这书的第一章对于开始学习多复变的人特别有用。）

黎曼曲面

1. 紧黎曼曲面引论，伍鸿熙等著，科学出版社版。
   （一本极好的教程。）
2. Riemann Surfaces, by H. Farkas and I. Kra.
   （也许是近来关于黎曼面方法的一个最好的表述。）
3. Lectures on Riemann Surfaces, by R Gunning.
   （要想知道一般的工具怎样应用于黎曼面的研究，这本书是很有用的。）
4. Introduction to Riemann Surfaces, by G. Springer
   （这方面的一本经典的书。）



代 数 曲 线

1. Algebraic Curves, by R. Walker.
   (至今仍是我所钟爱的一本书。)
2. Algebraic Curves, by W. Fulton.
   (对代数方法的一个极好的导引。)
3. A Treatise on Plane Algebraic Curves, by J. L. Coolidge
   (代数曲线经典理论的一个非常好的讨论。)
4. Curves and their Jacobians, by D. Mumford.
   (一个极好的综述。)
5. Topics in the Theory of Algebraic Curves, by E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, and J. Harris.
   (代数曲线这一历史悠久的论题，目前仍然是许多研究的中心。这方面的发展记录于这本将于1984年出版的书之中。)

P·格列菲斯

1983年1月于美国哈佛大学



目　录

第一章 基本概念

§1 复射影平面P^2C上的代数曲线

设$f(x,y)$是二元实系数多项式。在R^2上由方程

$$f(x,y)=0 \tag{1.1}$$

给出的图形称为实代数曲线；$f(x,y)$的次数称为这代数曲线的次数。读者已经熟悉了一次和二次的实代数曲线——直线、椭圆、双曲线、抛物线等。但是，限制在实数范围内讨论更一般的代数曲线，会有若干不方便之处，难以获得整齐的结果。这主要是因为实数域不是代数封闭域。例如，我们欲讨论这样的问题：一条任意直线L与由(1.1)给出的代数曲线C有多少交点。不失一般性，可设L通过坐标原点(经过适当的坐标变换很容易满足这一要求)，它的参数方程可以写成

$$\begin{cases} x=\alpha t, \\ y=\beta t. \end{cases} \tag{1.2}$$

又设

$$f(x,y)=f_n(x,y)+f_{n-1}(x,y)+\cdots+f_0,$$

其中$f_k(x,y)$是k次齐次多项式。把(1.2)代入(1.1)得

$$f_n(\alpha,\beta)t^n+f_{n-1}(\alpha,\beta)t^{n-1}+\cdots+f_0=0. \tag{1.3}$$

在实数范围内要判断这样的方程有多少根，不是一件轻而易举的事，而且结论也很不整齐——视系数的不同情形，实根的数目可以多少不一。但是，如果考虑复系数的二元多项式$f(x,y)$而把(1.1)视为C^2上的代数曲线，再来讨论复直线(1.2)与复代数曲线(1.1)的交点，也得到方程(1.3)。由熟知的代数基本定理，只要$f_n(\alpha,\beta)\neq 0$，方程(1.3)恰有n个根(重根重复计数)，也就是说n次复代数曲线C与复直线L相交于n个点（对应于重根的交点视为重

交点）。上面的讨论中还有一种例外的情形：如果

$$f_n(\alpha,\beta)=f_{n-1}(\alpha,\beta)=\cdots=f_{m+1}(\alpha,\beta)=0,$$
$$f_m(\alpha,\beta)\neq 0,$$

那么 L 与 C 在 C^2 上将只有 m 个交点。这时可以认为有 $n-m$ 个交点在无穷远处。这种观点可作如下解释：在(1.3)中作替换 $t=1/s$，并以 s^n 乘等式两边就得到

$$f_n(\alpha,\beta)+f_{n-1}(\alpha,\beta)s+\cdots+f_0s^n=0, \qquad (1.3)'$$

如果 $f_n(\alpha,\beta)\neq 0$，那么 $s=0$（相当于 $t=\infty$）不是(1.3)′的根；如果

$$f_n(\alpha,\beta)=f_{n-1}(\alpha,\beta)=\cdots=f_{m+1}(\alpha,\beta)=0,$$

而

$$f_m(\alpha,\beta)\neq 0,$$

那么 $s=0$（相当于 $t=\infty$）就是(1.3)′的 $n-m$ 重根，这时我们说 L 与 C 在无穷远处有 $n-m$ 重交点。因此，为了讨论方便，需要给 C^2 添加“无穷远直线”以构成复射影平面 P^2C。本书讨论的主要对象，将是复射影平面 P^2C 上的代数曲线。

为给 C^2 添加无穷远直线，最方便的办法是通过齐次坐标。对于点 $(x,y)\in C^2$，其齐次坐标 (ζ,ξ,η) 是满足下式

$$x=\frac{\xi}{\zeta}, \qquad y=\frac{\eta}{\zeta} \qquad (1.4)$$

的复数组。如果 (ζ,ξ,η) 是 (x,y) 的齐次坐标，显然，$(\lambda\zeta,\lambda\xi,\lambda\eta)$（$\lambda\in C$，$\lambda\neq 0$）也是 (x,y) 的齐次坐标。

要使(1.4)有意义，必须 $\zeta\neq 0$。但如果 ξ,η 不全为0，当 $\zeta\to 0$ 时，点 $x=\xi/\zeta$，$y=\eta/\zeta$ 沿 $\xi:\eta$ 方向趋向无穷远，因而我们认为 $(0,\xi,\eta)$ 表示 $\xi:\eta$ 方向的无穷远点。这样，通过齐次坐标，我们给 C^2 中每一方向添加了一个无穷远点。所有的无穷远点组成一条无穷远直线 $L_\infty:\zeta=0$。添加了无穷远直线的 C^2 称为是复射影平面 P^2C。下面我们更严格地叙述这一过程。

在集合 $\boldsymbol{C}^2\setminus\{(0,0,0)\}$ 中建立一个关系"$\sim$"：

$$\left.\begin{array}{c}(\zeta,\xi,\eta)\sim(\zeta',\xi',\eta')\text{当且仅当存在}\\ \lambda\in\boldsymbol{C},\ \lambda\neq0,\ \text{使得}\\ \zeta'=\lambda\zeta,\ \xi'=\lambda\xi,\ \eta'=\lambda\eta.\end{array}\right\}\tag{1.5}$$

这显然是一个等价关系。按这关系把 $\boldsymbol{C}^2\setminus\{(0,0,0)\}$ 分成等价类，$(\zeta,\xi,\eta)\in\boldsymbol{C}^2\setminus\{(0,0,0)\}$ 所在的等价类记为 $[\zeta,\xi,\eta]$。显然有

$$[\zeta,\xi,\eta]=[\lambda\zeta,\lambda\xi,\lambda\eta]\quad\forall\lambda\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}.$$

按这等价关系作成的商空间(等价类的空间)

$$(\boldsymbol{C}^2\setminus\{(0,0,0)\})\Big/\sim$$

称为**复射影平面**，记为 $P^2\boldsymbol{C}$(在不至于引起混淆时也可简单地记为 P^2)。作为商空间，$P^2\boldsymbol{C}$ 带有商拓扑结构。在本章§7中，我们还将讨论 $P^2\boldsymbol{C}$ 的复流形结构，那时我们对它将会有更进一步的理解。

我们来考察(1.1)给出的曲线 C 在齐次坐标下的表示。把

$$x=\frac{\xi}{\zeta},\qquad y=\frac{\eta}{\zeta}$$

代入(1.1)并以 ζ^n 乘该式两边得

$$F(\zeta,\xi,\eta)=f_n(\xi,\eta)+f_{n-1}(\xi,\eta)\zeta+\cdots+f_0\zeta^n=0.$$

这方程的左端是一个关于 ζ,ξ,η 的齐次多项式。

一般地，如果 $F(\zeta,\xi,\eta)$ 是关于 ζ,ξ,η 的齐次多项式，那么

$$F(\zeta,\xi,\eta)=0\tag{1.6}$$

表示 $P^2\boldsymbol{C}$ 上的一条**代数曲线**，F 的次数称为这曲线的**次数**，(1.6)称为这曲线的**齐次方程**。限制在 $\boldsymbol{C}^2=P^2\boldsymbol{C}\setminus L_\infty$ 上，这曲线满足**仿射方程**

$$f(x,y)=0,\tag{1.7}$$

其中

$$f(x,y)=F(1,x,y).$$

这样，一条曲线的齐次方程决定这曲线在 $\boldsymbol{C}^2=P^2\boldsymbol{C}\setminus L_\infty$ 上的仿射方程。反过来，曲线的次数 n 和它在 $\boldsymbol{C}^2=P^2\boldsymbol{C}\setminus L_\infty$ 上的仿射

方程 $f(x,y)=0$ 也唯一地决定它的齐次方程

$$F(\zeta,\xi,\eta)=0,$$

这里

$$F(\zeta,\xi,\eta)=\zeta^n f\left(\frac{\xi}{\zeta},\frac{\eta}{\zeta}\right).$$

如果代数曲线 C 由方程

$$F(\zeta,\xi,\eta)=0$$

给出，而 F 分解为不可约齐次多项式的乘积

$$F=F_1^{m_1}\cdot F_2^{m_2}\cdot\cdots\cdot F_l^{m_l},$$

则记

$$C=m_1C_1+m_2C_2+\cdots+m_lC_l,$$

这里

$$C_j=\{(\zeta,\xi,\eta)\in P^2\mathbf{C}\mid F_j(\zeta,\xi,\eta)=0\}$$
$$(j=1,2,\cdots,l)$$

称为是 C 的**不可约分支**。特别地，如果 F 本身是不可约的，则称 C 为**不可约曲线**。

§2 Riemann 面

紧 Riemann 面与代数曲线的研究有密切的关系。具体说来就是：任何不可约的平面代数曲线，都有全纯的参数表示，这参数表示的定义域是一紧 Riemann 面。更准确的陈述，就是下面的**正则化定理**(这定理的证明将在下一章给出)。

定理2.1 对任一不可约代数曲线 $C\subset P^2\mathbf{C}$，存在一个紧 Riemann 面 $\tilde{C}$ 和一个全纯映射

$$\sigma:\ \tilde{C}\to P^2\mathbf{C},$$

使得 $\sigma(\tilde{C})=C$，并且 σ 在 C 的光滑点之上是一对一的。

这样的紧 Riemann 面 $\tilde{C}$ 连同全纯映射 σ 称为是 C 的**正则化**(Normalization)。正则化是研究代数曲线的强有力的工具。

另一方面，任何紧 Riemann 面也都可以表示为代数曲线，这就是本书将要多次用到的另一**基本事实**：

定理2.2 任意紧 Riemann 面 $\tilde{C}$ 都可以作为某平面代数曲线 C 的正则化，并可要求这代数曲线 C 至多只具有**通常二重点**（具体定义见第二章 §1)。这就是说，存在全纯映射 $\sigma: \tilde{C} \to P^2 \mathbf{C}$，使得 $\sigma(\tilde{C})$ 是一条至多只有通常二重点的代数曲线[①]。

由此看来，紧 Riemann 面的研究与平面代数曲线的研究，实际上是一回事，都是贯串于本书中的主要内容。本节先介绍 Riemann 面的定义及有关拓扑分类的基本结果。

定义2.3 一个 Riemann 面是一个连通的 Hausdorff 拓扑空间 C，连同 C 的一族开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和一族映射

$$z_\alpha: U_\alpha \to \mathbf{C},$$

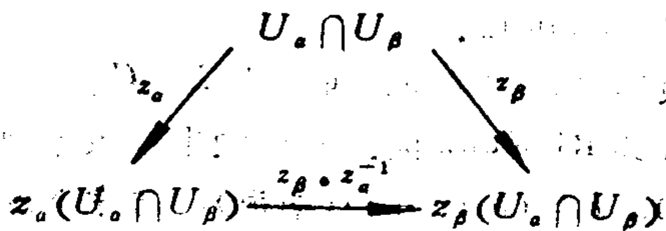
满足以下条件：

a) $z_\alpha: U_\alpha \to \mathbf{C}$ 是到 $\mathbf{C}$ 中开集 $z_\alpha(U_\alpha)$ 的同胚映射；

b) 只要 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$，函数

$$z_\beta \circ z_\alpha^{-1}: z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

就是双全纯的(即：函数本身是全纯的，其反函数也是全纯的)。



这时我们把 (U_α, z_α) 称为**局部全纯坐标**，而把 $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ 称为**全纯坐标覆盖**。

本书讨论的主要对象是紧 Riemann 面，即作为拓扑空间是紧

---

① 这定理的证明要用到层的上同调理论。本书附录所作的讨论介绍了证明的梗概。完全的证明可以参看 P. Griffiths and J. Harris 《Principles of Algebraic Geometry》, Chapter 2, 或者参看伍鸿熙等人所著的《紧致黎曼曲面引论》，第五章，§21，科学出版社，1981。

数空间的 Riemann 面。

例1 扩充复数 $\Sigma = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$（复数的一点紧化）。

显然 $\Sigma = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 是紧致、连通、Hausdorff 拓扑空间。考虑覆盖 $\{U_0, U_1\}$：

$$U_0 = \Sigma \backslash \{\infty\} = \boldsymbol{C}, \qquad U_1 = \Sigma \backslash \{0\}$$

及映射

$$\begin{aligned} z_0:\quad & U_0 \to \boldsymbol{C}, \\ & z \mapsto z; \\ z_1:\quad & U_1 \to \boldsymbol{C}, \end{aligned}$$

$$z \mapsto \begin{cases} 0, & z = \infty, \\ \dfrac{1}{z}, & z \neq \infty. \end{cases}$$

显然

$$z_1 \circ z_0^{-1}:\ \boldsymbol{C} \backslash \{0\} \to \boldsymbol{C} \backslash \{0\},$$

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

是双全纯的，具有同样表达式的 $z_0 \circ z_1^{-1}$ 也是如此。这样 $\Sigma = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 成为一紧 Riemann 面。

通过**球极投影**可以把单位球面 S 与 $\Sigma = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 等同起来，因而 S 也自然地成为 Riemann 面。具体的坐标表示如下。记 $N = (0, 0, 1)$（北极），$P = (0, 0, -1)$（南极），考虑 S 的覆盖 $\{U_0, U_1\}$ 及映射 Φ_0, Φ_1：

$$U_0 = S \backslash \{P\}, \qquad \Phi_0:\ U_0 \to \boldsymbol{C};$$

$$U_1 = S \backslash \{N\}, \qquad \Phi_1:\ U_1 \to \boldsymbol{C}.$$

这里 Φ_0 表示从南极 P 出发到 $\boldsymbol{C}$ 作球极投影，然后取共轭

$$\Phi_0(X, Y, Z) = \frac{X - iY}{1 + Z},$$

而 Φ_1 表示从北极 N 出发到 $\boldsymbol{C}$ 作球极投影

$$\Phi_1(X,Y,Z) = \frac{X+iY}{1-Z}.$$

我们有

$$\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1}: \boldsymbol{C}\backslash\{0\} \to \boldsymbol{C}\backslash\{0\},$$

$$z \mapsto \frac{1}{z},$$

$$\Phi_0 \circ \Phi_1^{-1}: \boldsymbol{C}\backslash\{0\} \to \boldsymbol{C}\backslash\{0\},$$

$$z \mapsto \frac{1}{z}.$$

显然 $\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1}$ 和 $\Phi_0 \circ \Phi_1^{-1}$ 都是双全纯的。

扩充的复平面 $\Sigma = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 或通过球极投影得到的复数球面 S（见图1.1），按上面的方式作成的紧 Riemann 面称为是Riemann球面。

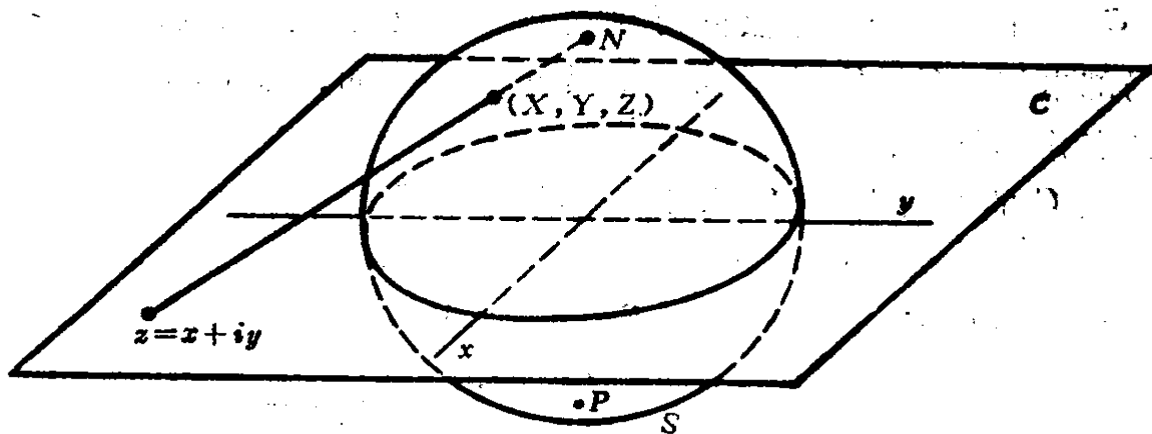


图1.1 球极投影

例2 复环面 $C = \boldsymbol{C}/\Lambda$。

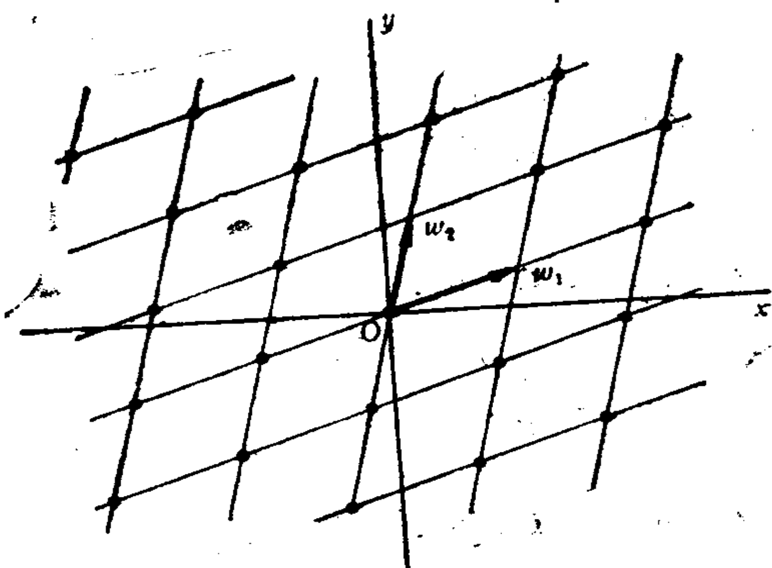


图1.2 格 Λ

设复数 w_1, w_2 实线性无关（即不存在实数 λ_1, λ_2,

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0,$$

使得

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0).$$

它们在 $\boldsymbol{C}$ 上定义了一个格（见图1.2）：

$$\Lambda = \{m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}\} \subset \boldsymbol{C}.$$

Λ 是由 w_1 和 w_2 生成的 $\boldsymbol{C}$ 的离散子群，它同构于 $\boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$。考虑 $\boldsymbol{C}$ 上的等价关系"～"：

$$z \sim z' \Longleftrightarrow z - z' \in \Lambda.$$

对这等价关系的商空间 $C = \boldsymbol{C}/\Lambda$ 称为**复环面**。容易看出这是一个紧致、连通、Hausdorff 拓扑空间。只要 ε 充分小，$\boldsymbol{C}$ 上任意 ε 圆盘：$|w - w_0| < \varepsilon$ 与每一等价类至多相交于一点，因而这圆盘与 $C = \boldsymbol{C}/\Lambda$ 上的一个开集之间可建立一一对应关系。用这种方式建立局部坐标，$C = \boldsymbol{C}/\Lambda$ 成为一个紧 Riemann 面。细节的验证留给读者作为练习。

从 $\boldsymbol{C}$ 的开集 U 到 $\boldsymbol{C}$ 的开集 V 的全纯函数

$$w = f(z) \quad (w = u + iv, \ z = x + iy), \tag{2.1}$$

同时也给出从 $\boldsymbol{R}^2$ 的开集 U 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的开集 V 的光滑映射

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases} \tag{2.2}$$

由此看出紧 Riemann面同时也是一个紧的光滑的实二维流形——紧光滑曲面。由全纯函数（2.1）引出的光滑映射（2.2）应满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

因而

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2>0.$$

这说明紧 Riemann 面表示的光滑的二维实流形是可定向的．从拓扑上看，任何紧 Riemann面同时也是一个**可定向**的二维紧光滑曲面。

拓扑学关于二维流形分类的经典结果告诉我们：任何可定向的二维紧流形都同胚于一个具有若干环柄的球面(见图1.3)；这环柄的个数 g，是一个基本的拓扑不变量，称为**亏格**。

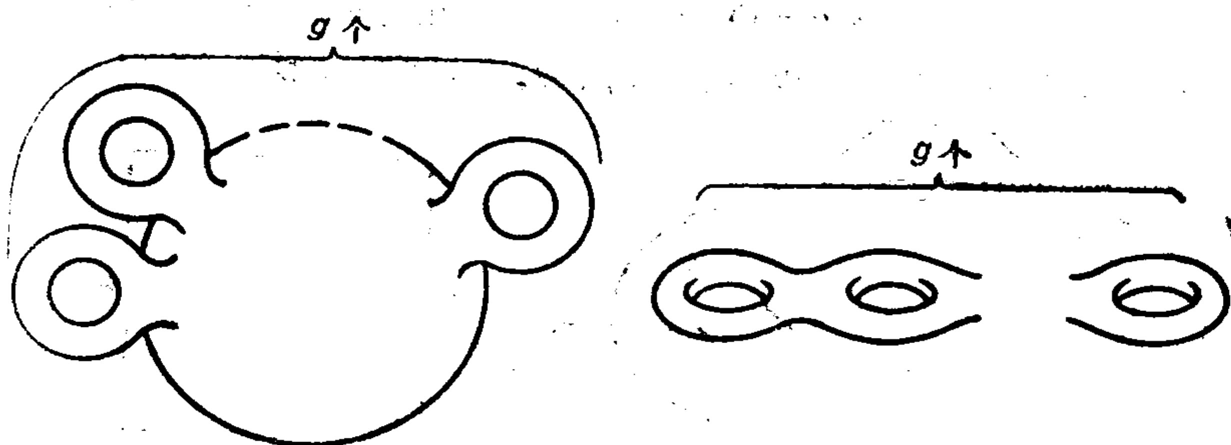


图1.3 具有 g 个环柄的球面

亏格为 0 的可定向紧曲面就是通常的球面；

亏格为 1 的可定向紧曲面就是通常的环面；

亏格为 2 的可定向紧曲面就是双环面。

研究二维曲面的一个方便的办法，是沿一些适当选择的割缝把这曲面切开然后摊成一块平面上的多边形区域。

例3 球面可以沿一条割缝 a 切开，摊成平面上的“二边形”区域（见图1.4）。沿着这二边形边缘巡迴一周，我们顺次经过 a

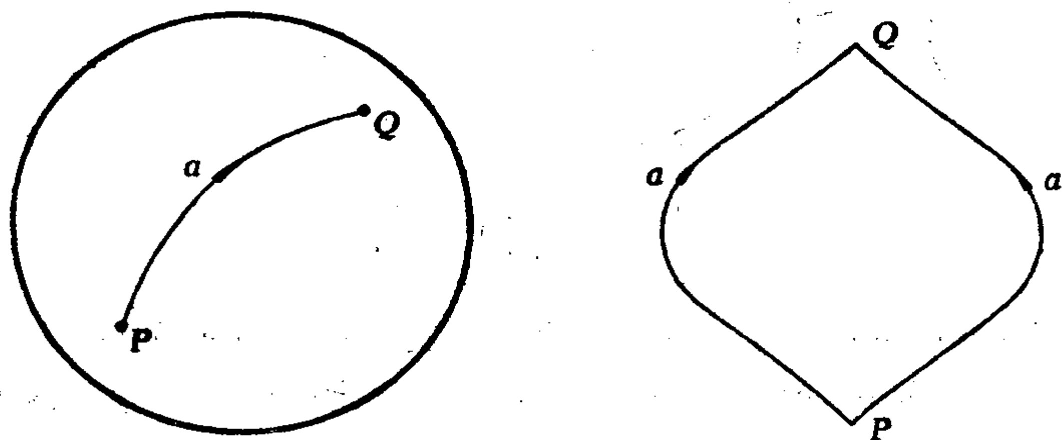


图1.4 割缝的球面与平面上的“二边形”

和 a^{-1}，因而这样的二边形记为 aa^{-1}。

例4 环面（亏格 $g=1$）可以沿从一点出发的两条割缝 a，b 切开，摊成平面上的四边形（见图1.5）。沿这四边形边缘巡迴一

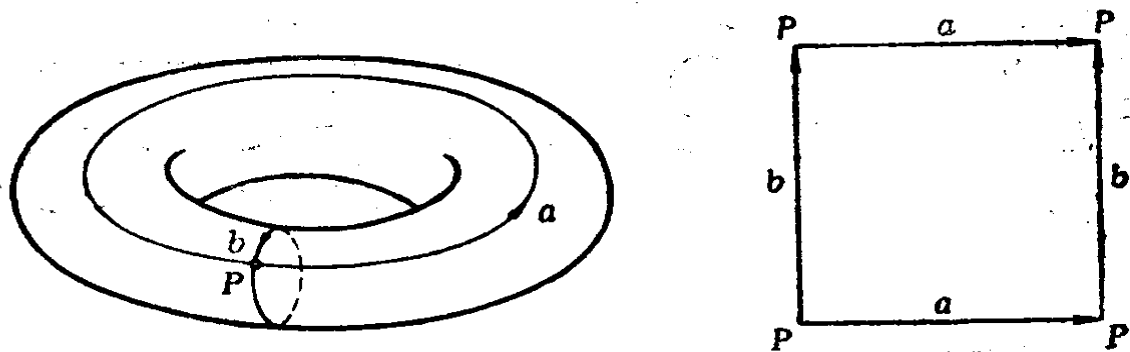


图1.5 割缝的环面与平面上的四边形

周，我们顺次经过 a，b，a^{-1}，b^{-1}，因而，这样的四边形记为 $aba^{-1}b^{-1}$。

例5 双环面($g=2$)可以沿从一点出发的四条割缝 a_1,b_1,a_2,b_2 切开，摊成平面上的八边形(见图1.6)。这样的八边形记为

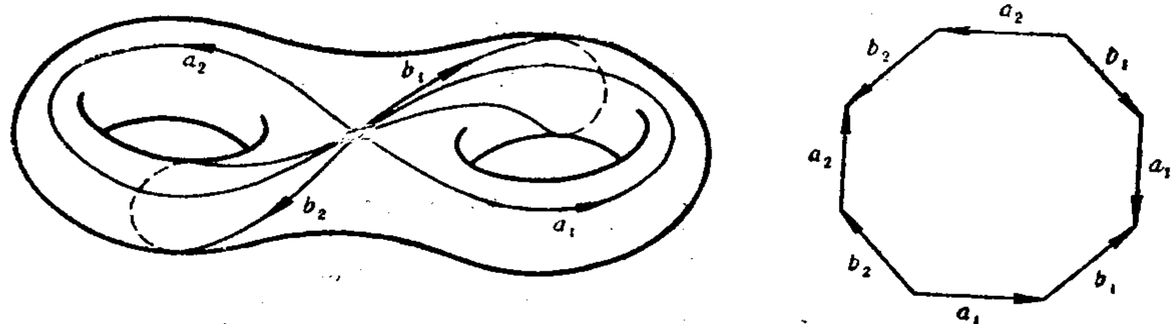


图1.6 割缝的双环面与平面八边形

$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$。

一般地，具有 g 个环柄的球面，可以沿 $2g$ 条割缝 $a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_g,b_g$ 切开(见图1.7)，摊成平面上的 $4g$ 边形：

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}.$$

二维紧曲面的这种表示法称为**规范表示**。

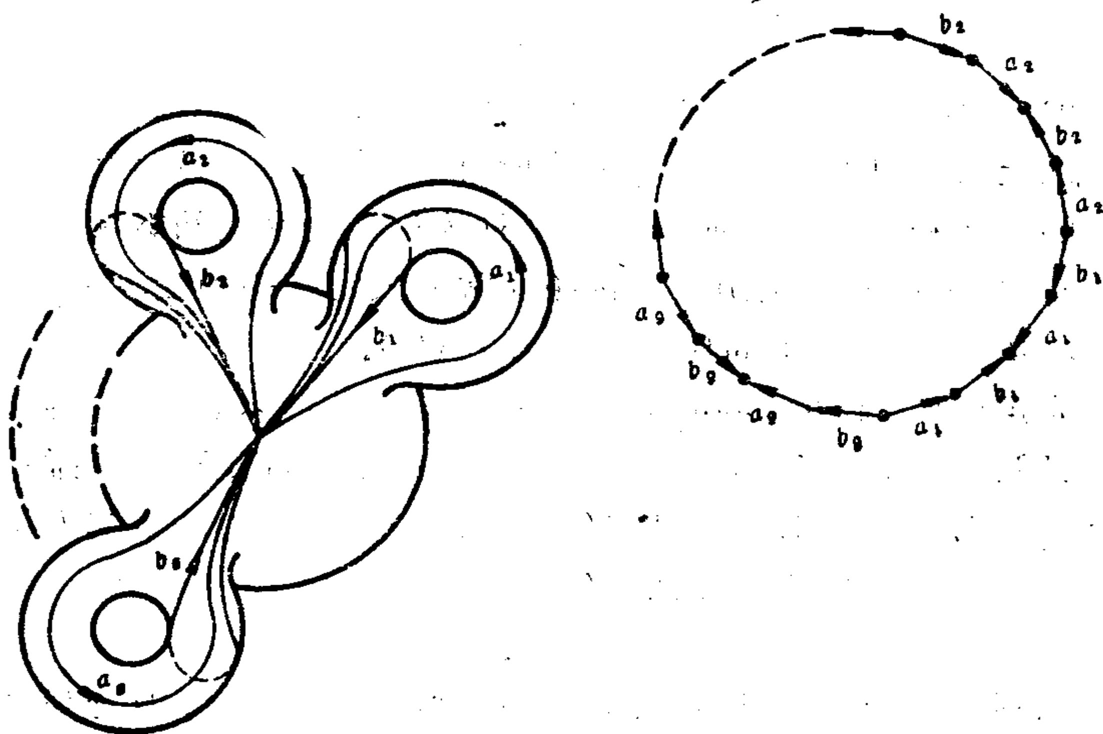


图1.7 具有 g 个环柄的割缝的球面

定义2.4 对于亏格为 g 的二维可定向紧曲面，其 Euler 示性数定义为

$$\chi = 2 - 2g.$$

Euler 示性数是极其重要的一个拓扑不变量。

§3 全纯与半纯函数

Riemann 面的每一局部都如同 $\mathbf{C}$ 上的一个开集. 通常复变函数论中的许多概念或研究对象（例如：全纯与半纯函数）都可以通过局部坐标表示定义于 Riemann 面之上，只是要求所论的对象对于局部坐标的变换具有不变的意义。

定义3.1 设 C 是一个 Riemann 面，$\{(U_i, z_i)\}$ 是它的全纯坐标覆盖，C 上的一个**半纯函数（全纯函数）** f，由一族映射 f_i: $U_i \to \mathbf{C}$ ($\forall i$) 给出，满足

a) 只要 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$，在 $U_i \cap U_j$ 上就有

$$f_i = f_j;$$

b) $\forall i$，$f_i \circ z_i^{-1}$ 都是半纯（全纯）函数。

注记3.2 Riemann 面 C 上的所有半纯函数，按照通常方式定义的加法和乘法，形成一个域，称为 C 上的**半纯函数域**，记为 $K(C)$。C 上所有全纯函数，按照通常方式定义的加法，乘法和数乘，成为一个 $\mathbf{C}$ 上的代数，记为 $\mathscr{O}(C)$。

定理3.3 紧 Riemann 面 C 上的全纯函数，只能是常值函数.

证明 首先，我们指出，全纯函数的**唯一性定理**可以推广到 Riemann 面 C 上。即，如果在 C 的任何一个有聚点的点集 E 上两全纯函数 f 和 g 相等，那么在 C 上就有

$$f \equiv g.$$

这可以利用复分析中已有的结果，通过局部坐标表示及连通性的讨论来证明。

其次，全纯函数的**极大模原理**也可以推广到 Riemann 面 C

上。这是因为，通过局部坐标表示，我们看到，如果全纯函数 f 的模在一点达到极大值，这全纯函数在包含该点的局部全纯坐标邻域内只能是常数，再利用唯一性定理，就得到 C 上的极大模原理：如果 f 的模在 C 上一点达到极大值，那么 f 只能是常值函数。

紧 Riemann 面 C 上的全纯函数 f 的模，作为紧拓扑空间上的连续函数，一定达到其极大値，因而 f 只能是常値函数。 ▌

定义3.4 设 C 是一个紧 Riemann 面，$f\in K(C), p\in C$。取 p 点邻近的局部坐标 z，使得 $z(p)=0$，则在 p 点邻近

$$f=z^{\nu}h(z),$$

这里 $h(z)$ 是一全纯函数，$h(0)\neq 0$，$\nu\in\mathbf{Z}$。对任意满足条件 $z(p)=0$ 的局部坐标 z，上述表示中的 ν 都是相同的，它由 f 所决定，称为 f 在 p 点的**重数**，记为 $\nu_p(f)$。$\nu_p(f)>0$ 时，p 称为 f 的**零点**，$\nu_p(f)$ 称为是零点 p 的重数；$\nu_p(f)<0$ 时，p 称为 f 的**极点**，$|\nu_p(f)|$ 称为是极点 p 的重数。

定理3.5 Riemann 球面 S 上的半纯函数域 $K(S)$ 同构于 $\mathbf{C}$ 上的有理分式域 $\mathbf{C}(z)$。

证明 显然每一有理分式 $r(z)\in\mathbf{C}(z)$ 定义了 S 上的一个半纯函数。反过来，设 f 是 S 上的任一半纯函数，它在局部坐标域 $U_0=\mathbf{C}$ 上的局部表示 $f_0=f\circ z_0^{-1}$ 可以写成

$$f_0=\sum_{i=1}^{N}p_i(z)+q(z),$$

这里

$$p_i(z)=\frac{b_{iN_i}}{(z-a_i)^{N_i}}+\cdots+\frac{b_{i1}}{z-a_i}$$

是 f_0 在极点 a_i 处的 Laurent 展式的主要部分，而 $q(z)$ 是一个全纯函数。如果 ∞ 不是 f 的极点，则 $q(z)$ 是有界的，它必须是常数，因而

$$f_0=\sum_{i=1}^{N}p_i(z)+c$$

是一个有理分式。如果∞是f的极点，通过替换$z=1/z'$，我们看出$q(1/z')$的展式只应有有限个负幂项，这说明$q(z)$只有有限个正幂项，因而是一个多项式。对这一情形

$$f_0=\sum_{i=1}^{N}p_i(z)+q(z)$$

也是一有理分式。▌

设

$$\Lambda=\{m_1w_1+m_2w_2 | m_1,m_2\in \boldsymbol{Z}\}$$

是$\boldsymbol{C}$上的一个格。对于复环面$C=\boldsymbol{C}/\Lambda$，我们有以下结果。

定理3.6 $K(\boldsymbol{C}/\Lambda)$同构于以$(w_1,w_2)$为周期的双周期半纯函数所成之域。

证明 设

$$\pi: \boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}/\Lambda$$

是自然投射。如果$f\in K(\boldsymbol{C}/\Lambda)$，则$f\circ\pi$是一个以$(w_1,w_2)$为周期的半纯函数。反过来，任何以$(w_1,w_2)$为周期的双周期半纯函数$f_1$，也都诱导出一个$\boldsymbol{C}/\Lambda$上的半纯函数$f$，使得

$$f_1=f\circ\pi.$$ ▌

注记3.7 根据椭圆函数论中熟知的结果，任何以(w_1,w_2)为周期的双周期半纯函数，都可表示为具有同样双周期的Weierstrass椭圆函数$\mathscr{P}(z)$和$\mathscr{P}'(z)$的有理分式。因而，$K(\boldsymbol{C}/\Lambda)$由$\mathscr{P}(z),\mathscr{P}'(z)$生成。

习题3.1 证明$\nu_p(f)$的定义是合理的。

习题3.2 设$C=$Riemann球面S或复环面$\boldsymbol{C}/\Lambda$，$f\in K(C)$，试证

$$\sum_{p\in C}\nu_p(f)=0.$$

提示 对 $C=\mathbf{C}/\Lambda$ 的情形，把 $f\in K(C)$ 视为 $\mathbf{C}$ 上双周期半纯函数，在适当的周期平行四边形内计算 f'/f 的留数和

$$\sum \operatorname{Res}(f'/f).$$

定义3.8 设 C,C' 是 Riemann 面，$\{(U_i,z_i)\},\{(U'_\alpha,z'_\alpha)\}$ 分别是它们的全纯坐标覆盖。一个**全纯映射** f：$C\to C'$ 由一族连续映射

$$f_i: U_i\to C' \quad (\forall i)$$

给出，满足以下条件：

a) 只要 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$，在 $U_i\cap U_j$ 上就有

$$f_i=f_j;$$

b) 只要 $f^{-1}(U'_\alpha)\cap U_i\neq\varnothing$，在 $f^{-1}(U'_\alpha)\cap U_i$ 上

$$z'_\alpha\circ f_i\circ z_i^{-1}$$

是全纯函数。

注记3.9 显然，Riemann 面 C 上的任意半纯函数 f，都是到 Riemann 球面 S 上的全纯映射。

习题3.3 设 C,C' 是 Riemann 面，f：$C\to C'$ 是全纯映射，$p\in C$，$q\in C'$，$f(p)=q$。试证存在 C 在 p 点邻近的局部坐标 z 和 C' 在 q 点邻近的局部坐标 w 满足 $z(p)=0$，$w(q)=0$，并使 f 的局部表示为 $w=z^\mu$，$\mu\in\mathbf{Z}^+$。对于任何满足上述条件的局部坐标，这样的 μ 都是相同的。我们称 $\mu-1$ 为 f 在 p 点的**分歧指数**。

§4 全纯微分与半纯微分

本节讨论 Riemann 面 C 上的微分。

定义4.1 设 C 是一个 Riemann 面，C 上的一个**全纯微分（半纯微分）**ω 由满足下面条件的一族 $\{(U_i,z_i,\omega_i)\}$ 给出：

a) $\{(U_i,z_i)\}$ 是 C 的全纯坐标覆盖，

$$\omega_i=f_i(z_i)\mathrm{d}z_i,$$

这里 $f_i\in\mathscr{O}(U_i)(K(U_i))$；

b） 如果 $z_i=\varphi_{ij}(z_j)$ 是在 $U_i\cap U_j(\neq\varnothing)$ 上的坐标变换，那么

$$f_i(\varphi_{ij}(z_j))\frac{\mathrm{d}\varphi_{ij}(z_j)}{\mathrm{d}z_j}=f_j(z_j),$$

即微分的局部表示按链式法则变换

$$f_i(\varphi_{ij}(z_j))\mathrm{d}\varphi_{ij}(z_j)=f_j(z_j)\mathrm{d}z_j.$$

C 上全纯微分（半纯微分）的集合记为 $\Omega^1(C)(K^1(C))$。

以下结果是显然的。

命题4.2 设 ω_0,ω_1 是 C 上半纯微分，$\omega_0\neq0$，则ω_1/ω_0 给出 C 上一个半纯函数。

例 1 设 $r(z)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上有理分式，则 $r(z)\mathrm{d}z$ 给出 Riemann球面 S 上的半纯微分。

习题4.1 试证所有的 $\omega\in K^1(S)$ 都具有上述形式。

提示 取定一有理分式 $r_0(z)$，令

$$\omega_0=r_0(z)\mathrm{d}z.$$

则对任意 $\omega\in K^1(S)$ 有 $\omega/\omega_0\in K(S)$，因而 $\omega/\omega_0=r(z)$ 是有理分式。

例 2 设

$$\Lambda=\{m_1w_1+m_2\omega_2\,|\,m_1,m_2\in\boldsymbol{Z}\}$$

是 $\boldsymbol{C}$ 上的一个格，f 是以 $(w_1,\ w_2)$ 为周期的双周期半纯函数，则$f(w)\mathrm{d}w$是定义于$C=\boldsymbol{C}/\Lambda$上的半纯微分。

习题4.2 试证 $\omega=\mathrm{d}w$ 给出 $C=\boldsymbol{C}/\Lambda$ 上的一个全纯微分。

例 3 设C 是一个 Riemann面，

$$f=\{(U_i,z_i,f_i(z_i))\}\in K(C).$$

则由下式定义了一个半纯微分 $\mathrm{d}f\in K^1(C)$：

$$\mathrm{d}f=\left\{\left(U_i,z_i,\mathrm{d}f_i(z_i)=\frac{\mathrm{d}f_i(z_i)}{\mathrm{d}z_i}\mathrm{d}z_i\right)\right\}.$$

定义4.3 由上式定义的 $\mathrm{d}f$ 称为**半纯函数 f 的微分**。

定义4.4 设C是一个Riemann面，

$$\omega=\{(U_i,z_i,f_i(z_i)\mathrm{d}z_i)\}\in K^1(C),\quad p\in U_i\cap U_j.$$

则

$$\nu_p(f_i)=\nu_p\left(f_i(\varphi_{ij}(z_j))\frac{\mathrm{d}\varphi_{ij}(z_j)}{\mathrm{d}z_j}\right)=\nu_p(f_j).$$

因而我们可以定义

$$\nu_p(\omega)=\nu_p(f_i),\qquad p\in U_i.$$

如果$\nu_p(\omega)>0$，则p称为是ω的**零点**；如果$\nu_q(\omega)<0$，则q称为是ω的**极点**。

定义4.5 设C是一个Riemann面，

$$\omega=\{(U_i,z_i,f_i(z_i)\mathrm{d}z_i)\}\in K^1(C),$$

γ是C上分段光滑曲线，它不含ω的极点，$\gamma=\bigcup\gamma_i$是γ的任意一个满足$\gamma_i\subset U_i$的分拆。我们定义

$$\int_\gamma\omega=\sum_i\int_{\gamma_i}f_i(z_i)\mathrm{d}z_i.$$

这定义是确切的，因为如果$\gamma=\bigcup\gamma_i'$是γ的另一个满足$\gamma_i'\subset U_i$的分拆，则按变元替换公式

$$\int_{\gamma_i\cap\gamma_j'}f_i(z_i)\mathrm{d}z_i=\int_{\gamma_i\cap\gamma_j'}f_j(z_j)\mathrm{d}z_j,$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_i\int_{\gamma_i}f_i(z_i)\mathrm{d}z_i&=\sum_i\sum_j\int_{\gamma_i\cap\gamma_j'}f_i(z_i)\mathrm{d}z_i\\&=\sum_j\sum_i\int_{\gamma_i\cap\gamma_j'}f_j(z_j)\mathrm{d}z_j\\&=\sum_j\int_{\gamma_j'}f_j(z_j)\mathrm{d}z_j.\end{aligned}$$

定理4.6（全纯微分的Stokes定理） 设C是一个Riemann面，$\Omega\subset C$是一开集，$\bar{\Omega}$是紧致的，$\partial\Omega=\gamma$是一分段光滑曲线，ω是在包含$\bar{\Omega}$的一个开集上全纯的微分。则

$$\int_{\partial\Omega}\omega = 0.$$

证明 适当地剖分Ω为$\Omega=\bigcup\Omega_i$，使得

$$\Omega_i\subset U_i,$$

$\partial\Omega_i$是分段光滑曲线。通过局部坐标表示并利用复变函数论中的Cauchy定理即得

$$\int_{\partial\Omega_i}\omega = 0.$$

于是

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \sum_i\int_{\partial\Omega_i}\omega = 0. \quad \blacksquare$$

习题4.3 证明Riemann球面S上除了平凡的全纯微分外没有其他全纯微分。

提示 设ω是全纯微分，取定$q\in S$，考虑

$$f(p)=\int_q^p\omega, \qquad p\in S.$$

由Stokes定理可知f是有确切定义的。容易看出，f是一全纯函数，因而是常数。于是$\omega=\mathrm{d}f=0$。

定义4.7 设C是一个Riemann面，$\omega\in K^1(C)$，$p\in C$，γ_p是环绕p点的一小圆周，ω在γ_p围成的圆盘上除了p点外没有别的极点（p点本身可以是极点也可以不是极点）。则我们把ω在p点的留数定义为

$$\mathrm{Res}_p(\omega)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_p}\omega.$$

由Stokes定理可以看出这定义不依赖于小圆周γ_p的选择。对于$p\in U_j$，$\gamma_p\subset U_j$我们有

$$\mathrm{Res}_p(\omega)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_p}\omega=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_p}f_j(z_j)\mathrm{d}z_j$$
$$=\mathrm{Res}_p(f_j(z_j)\mathrm{d}z_j).$$

定理4.8(留数定理) 设C是紧Riemann面. 对于$\omega\in K^1(C)$, 我们有

$$\sum_{p\in C}\mathrm{Res}_p(\omega)=0.$$

证明 因为C是紧致的, ω在C上只能有有限个极点, 设这些极点是$p_1,p_2,\cdots,p_m$. 取分别含有这些极点的互相隔离的小圆盘$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_m$, 要求满足上面留数定义中的条件。记

$$\Omega=C\setminus\bigcup_i\Delta_i.$$

显然, 对适当选择的定向有

$$\partial\Omega=-\bigcup_i\partial\Delta_i.$$

由 Stokes 定理我们得到

$$\begin{aligned}2\pi\mathrm{i}\sum_{p\in C}\mathrm{Res}_p(\omega)&=2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^m\mathrm{Res}_{p_i}(\omega)\\&=\sum_{i=1}^m\int_{\partial\Delta_i}\omega\\&=-\int_{\partial\Omega}\omega=0.\end{aligned}$$ ▌

定理4.9 如果$f\in K(C)$不是常值函数, 那么

$$\sum_{p\in C}\nu_p(f)=0.$$

这意味着f的零点个数等于f的极点个数(重数计算在内):

$$\#\{f\text{ 的零点}\}=\#\{f\text{ 的极点}\}.$$

证明 取$\omega=\mathrm{d}f/f$并利用上面的留数定理。▌

推论4.10 如果$f\in K(C)$不是常值函数, 那么对任意$a\in\mathbf{C}$都有

$$\begin{aligned}&\#f^{-1}(a)\ (\text{即使得}f(p)=a\text{ 的点 }p\text{ 的个数})\\&=\#\{f\text{ 的极点}\}.\end{aligned}$$

这说明任意一个复数都可以作为 f 的函数值，并且每个函数值都重复出现同样多次（重数考虑在内）。

注记4.11 如果把 $f\in K(C)$ 视为从 C 到 Riemann 球面 S 的全纯映射，那么上面的推论可以解释为：S 上的任意一个点都是 f 的象，而且每个点的原象个数都相等（重数考虑在内）。

§5 微分形式

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y\in \boldsymbol{C}$ 同时表示了一对实数 $(x,y)\in \boldsymbol{R}^2$，人们常常在考虑 $\boldsymbol{C}$ 的复结构的同时，也考虑相应的 $\boldsymbol{R}^2$。例如，一个函数 f：$\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ 既可以视为 $\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ 的映射

$$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y), \end{cases}$$

又可以视为 $\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{C}$ 的映射

$$f=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

如果同时考虑 $\boldsymbol{C}$ 及与之相应的 $\boldsymbol{R}^2$，把 f：$\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ 视为 $\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{C}$ 的映射，那么采用以下记号是方便的。

记号

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\mathrm{i}\,\mathrm{d}y,\qquad \mathrm{d}\bar{z}=\mathrm{d}x-\mathrm{i}\,\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}.$$

这时显然 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ 等价于 Cauchy-Riemann 方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},
\end{cases}
$$

$$f=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

因而 f 是全纯的必须并且只须

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0.$$

对于向量空间V中的元素，可以定义双线性、反对称的外乘积$\wedge$：

$$
\begin{cases}
(av_1)\wedge v_2=a(v_1\wedge v_2), \\
(v_1+v_1')\wedge v_2=v_1\wedge v_2+v_1'\wedge v_2, \\
v_2\wedge v_1=-v_1\wedge v_2.
\end{cases}
$$

采用上面约定的记号，实微分 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 的外乘积与复微分$\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}\bar{z}$的外乘积，有以下关系：

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}=-2\mathrm{i}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

定义5.1 设C是一个 Riemann 面，$\{(U_i,z_i)\}$是它的全纯坐标覆盖。C上的一个**微分 1-形式** λ，局部地由

$$\lambda_i=f_i(z_i,\bar{z}_i)\mathrm{d}z_i+g_i(z_i,\bar{z}_i)\mathrm{d}\bar{z}_i$$

给出，这里f_i,g_i是光滑函数，要求它们满足以下的变换法则

$$f_i(\varphi_{ij}(z_j),\overline{\varphi_{ij}(z_j)})\frac{\mathrm{d}\varphi_{ij}(z_j)}{\mathrm{d}z_j}=f_j(z_j,\bar{z}_j),$$

$$g_i(\varphi_{ij}(z_j),\overline{\varphi_{ij}(z_j)})\overline{\frac{\mathrm{d}\varphi_{ij}(z_j)}{\mathrm{d}z_j}}=g_j(z_j,\bar{z}_j).$$

定义5.2 微分 1-形式$\lambda=\{f_i\mathrm{d}z_i+g_i\mathrm{d}\bar{z}_i\}$的**外微分** $\mathrm{d}\lambda$ 定义为

$$d\lambda = \{df_i \wedge dz_i + dg_i \wedge d\bar{z}_i\}$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial g_i}{\partial z_i} - \frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_i}\right) dz_i \wedge d\bar{z}_i\right\}.$$

容易看出，这定义是确切的。

定义5.3 C 上的微分 1-形式 λ 称为是闭 1-形式，如果 $d\lambda = 0$；λ 称为是恰当1-形式，如果存在光滑函数 f，使得

$$\lambda = df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

注记5.4 由于

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z},$$

我们有

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z} d\bar{z} \wedge dz + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}\right) dz \wedge d\bar{z} = 0.$$

因而恰当形式都是闭形式。

定理5.5（微分形式的 Stokes 定理） 设 C 是一Riemann面，Ω 是 C 上一个开集，λ 是定义于包含 $\bar{\Omega}$ 的开集上的微分1-形式.则

$$\int_{\partial \Omega} \lambda = \iint_{\Omega} d\lambda .$$

这定理的证明可参看讲述微分流形的有关书籍。

推论5.6 如果 λ 是紧 Riemann 面 C 上的微分 1-形式，那么

$$\iint_C d\lambda = 0 .$$

§6 Poincaré-Hopf 公式

设C是一个紧 Riemann 面。在§4我们已证明了，对于非常值的$f\in K(C)$有

$$\sum_{p\in C}\nu_p(f)=0.$$

类似地，我们考虑这样的问题：对于非平凡的$\omega\in K^1(C)$，

$$\sum_{p\in C}\nu_p(\omega)=?$$

为了讨论这样的问题，我们先作一些必要的准备。

定义6.1 设

$$f:\ S^1\to \boldsymbol{R}^2\backslash\{O\}$$

是光滑映射，它的环绕数定义为

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{S^1}f^*\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2+v^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_{S^1}\mathrm{d}\arg f.$$

环绕数表示：当z绕S^1一周时，$f(z)$环绕$\boldsymbol{R}^2$的原点O的圈数（这由上面的定义式可以看出）。由此，我们看出一件十分重要的事情：**环绕数总是整数**。我们还看到，**环绕数是同伦不变量**，即：如果f经过光滑同伦变化

$$f_t:\ S^1\to\boldsymbol{R}^2\backslash\{O\},\qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

环绕数始终不变。这是因为：在同伦变化过程中，f_t的环绕数连续变化而又只能取整值。

设$U\subset\boldsymbol{R}^2$是含有原点O的开集，

$$f:\ U\backslash\{O\}\to\boldsymbol{R}^2\backslash\{O\}$$

是光滑映射，这时限制在U中环绕原点O的任何一个小圆周S上，f的环绕数应该都相同，因为当一个小圆周连续形变到另一小圆周时，环绕数连续变化而又只取整值。

定义6.2(微分形式的指标) 设U是R^2中包含原点O的一个开集，

$$\lambda = a(x,y)\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y$$

是定义于$U\setminus\{O\}$的一个在各点均不为0的一个微分形式。考虑U中环绕原点O的任一小圆周S^1和映射

$$g: \quad S^1 \to R^2\setminus\{O\},$$

$$p \mapsto (a(p), b(p)),$$

微分形式λ在O点的指标就定义为映射g的环绕数

$$\mathrm{Ind}_O\lambda \stackrel{\mathrm{def}}{=\!=} \frac{1}{2\pi}\oint_{S^1} g^* \frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2+v^2}.$$

如上面所述，这样定义的指标(作为环绕数)与U中小圆周S^1的选取无关。

通过局部坐标，我们可以定义(实)二维微分流形上微分形式λ在孤立奇点(即取0值或∞值的点)的指标。当然需要验证这样定义的指标与局部坐标的选取无关，我们这里就不再详细讨论了。

以下定理是拓扑学中的一个经典结果。

定理6.3(实微分形式的Poincaré-Hopf指标公式) 设C是可定向二维紧微分流形，λ是C上微分1-形式，它除了有限个孤立奇点外是光滑的，记这些奇点为$p_1, p_2, \cdots, p_m$。则

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ind}_{p_i}\lambda = \chi(C).$$

这里$\chi(C) = 2 - 2g$是C的Euler示性数。

注记6.4 通常对于向量场陈述的Poincaré-Hopf指标公式与这里陈述的形式等价。

利用这一结果，我们容易得出关于半纯微分的相应公式。

定理6.5(关于半纯微分的Poincaré-Hopf指标公式) 设C是紧Riemann面，$\omega \in K^1(C)$，则

$$\sum_{p\in C}\nu_p(\omega)=-\chi(C).$$

证明 考虑实微分形式

$$\lambda=\mathrm{Re}\,\omega,$$

我们来计算它在各奇点处的指标。在 ω 的奇点 p 邻近，ω 的局部表示为

$$\omega=z^{\nu}dz,\quad \nu\in\boldsymbol{Z},$$

于是

$$\begin{aligned}\lambda&=\mathrm{Re}\,\omega\\&=r^{\nu}(\cos\nu\theta\,\mathrm{d}x-\sin\nu\theta\,\mathrm{d}y)\\&=r^{\nu}(\cos(-\nu\theta)\mathrm{d}x+\sin(-\nu\theta)\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

由此看出

$$\mathrm{Ind}_p\lambda=-\nu_p(\omega),$$

因而

$$\sum_{p\in C}\nu_p(\omega)=-\sum_{p\in C}\mathrm{Ind}_p\lambda=-\chi(C).\quad \blacksquare$$

§7 复流形

定义7.1 设 $U\subset\boldsymbol{C}^n$ 是一个开集。复函数 $f:U\to\boldsymbol{C}^n$ 称为是**全纯的**，如果对任意的

$$z_0=(z_0^1,\cdots,z_0^n)\in U,$$

存在 $\varepsilon>0$，使得在**多圆盘**

$$P(z_0,\varepsilon)=\{z=(z^1,\cdots,z^n)\in\boldsymbol{C}^n|\ |z^i-z_0^i|<\varepsilon,\\ i=1,\cdots,n\}\subset U$$

之上 f 可以展开成收敛的(n 元)幂级数

$$f(z)=\sum_{i_1,\cdots,i_n\geq 0}a_{i_1\cdots i_n}(z^1-z_0^1)^{i_1}\cdots(z^n-z_0^n)^{i_n}.$$

在 $U\subset\boldsymbol{C}^n$ 全纯的函数的集合记为 $\mathscr{O}(U)$。

定义7.2 设$U\subset \boldsymbol{C}^n$和$V\subset \boldsymbol{C}^m$分别是$\boldsymbol{C}^n$和$\boldsymbol{C}^m$中的开集。映射$f$：$U\to V$称为是**全纯的**，如果

$$f(z)=(f^1(z),\cdots,f^m(z))$$

的每一个分量$f^j(z)(j=1,\cdots,m)$都是全纯函数。映射

$$f: U\to V$$

称为是**双全纯的**，如果$m=n$，f是单、满全纯映射，并且f^{-1}: $V\to U$也是全纯的。

定义7.3 一个**复流形**X是一个连通的Hausdorff空间，连同它的一个开覆盖$\{U_\alpha\}$和一族映射

$$z_\alpha: U_\alpha\to \boldsymbol{C}^n,\quad \forall \alpha,$$

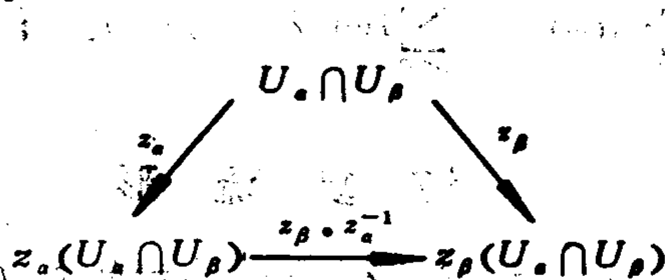
满足以下条件：

a）z_α是从U_α到$\boldsymbol{C}^n$中的一个开集的同胚；

b）只要$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，那么

$$z_\beta\circ z_\alpha^{-1}: z_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to z_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

就是双全纯的。



这时，(U_α,z_α)称为**局部全纯坐标**，$\{(U_\alpha,z_\alpha)\}$称为**全纯坐标覆盖**。

定义7.4 设X和Y是两个复流形，$\{(U_\alpha,z_\alpha)\}$和$\{(V_i,w_i)\}$分别是它们的全纯坐标覆盖。一个连续映射

$$f: X\to Y$$

称为是**全纯的**，如果它的局部坐标表示

$$w_i\circ f\circ z_\alpha^{-1}: z_\alpha(U_\alpha\cap f^{-1}(V_i))\to w_i(V_i)$$

$$(\forall \alpha,\ i: U_\alpha\cap f^{-1}(V_i)\neq\varnothing)$$

都是全纯的。

如果 f 是单、满全纯映射并且逆映射 f^{-1} 也是全纯的，则称 f 为**双全纯映射**。如果 X 与 Y 之间存在双全纯映射，则称 X 与 Y 是**同构的复流形**，并称这双全纯映射为 X 到 Y 的**同构**。特别地，X 到自身的双全纯映射称为是 X 的**自同构**。X 的自同构的集合记为 $\mathrm{Aut}(X)$，它对于复合运算成为一个群，称为是 X 的**自同构群**。

例 1 Riemann 面都是复流形（$n=1$ 的情形）。

例 2 设 $C_1,\cdots,C_n$ 是 Riemann 面，则

$$C_1\times C_2\times\cdots\times C_n$$

是复流形。

例 3 设 $w_1,w_2,\cdots,w_{2n}\in \mathbf{C}^n$ 是 $2n$ 个实线性无关的复向量。

$$\Lambda=\{m_1w_1+\cdots+m_{2n}w_{2n}\mid m_i\in \mathbf{Z}^n,\ i=1,\cdots,2n\}$$

称为是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个**格**。容易看出商空间

$$\mathbf{C}^n/\Lambda$$

是一个复流形。

例 4 在 $\mathbf{C}^{n+1}\backslash\{O\}$ 中定义一个关系“$\sim$”：

$$(\xi^0,\cdots,\xi^n)\sim(\eta^0,\cdots,\eta^n)$$
$$\Longleftrightarrow 存在\ \lambda\in\mathbf{C},\ \lambda\neq 0,\ 使得$$
$$\xi^j=\lambda\eta^j\ (j=0,\cdots,n).$$

容易验证，“$\sim$”是一等价关系。按这等价关系把 $\mathbf{C}^{n+1}\backslash\{O\}$ 分成等价类。$(\xi^0,\cdots,\xi^n)$ 所在的等价类记为 $[\xi^0,\cdots,\xi^n]$。$\mathbf{C}^{n+1}\backslash\{O\}$ 按这等价关系的商空间记为 $P^n\mathbf{C}$（不致混淆时就简单记为 $\boldsymbol{P}^n$），称为是 n **维射影空间**。$\xi^0,\cdots,\xi^n$ 称为是点 $[\xi^0,\cdots,\xi^n]\in P^n\mathbf{C}$ 的**齐次坐标**。

我们指出射影空间 $P^n\mathbf{C}$ 是一个复流形。记

$$U_i=\{[\xi^0,\cdots,\xi^n]\in P^n\mathbf{C}\mid \xi^i\neq 0\}.$$

这是 $P^n\mathbf{C}$ 中的开集。定义 z_i 如下：

$$z_i:\ U_i \to \boldsymbol{C}^n,$$

$$[\xi^0, \cdots, \xi^n] \mapsto \left(\frac{\xi^0}{\xi^i}, \cdots, \frac{\hat{\xi^i}}{\xi^i}, \cdots, \frac{\xi^n}{\xi^i}\right)$$

（“∧”表示该处变元不存在）。

由于

$$\frac{\lambda\xi^j}{\lambda\xi^i} = \frac{\xi^j}{\xi^i},$$

这样定义的 z_i 只依赖于齐次坐标 $\xi^0, \cdots, \xi^n$ 所在的等价类，因而确实是定义于 $U_i \subset P^n\boldsymbol{C}$ 上的映射，并且是到 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个同胚。在 $U_i \cap U_j$ 上我们有

$$\begin{array}{ccc} & U_i \cap U_j & \\ \swarrow^{z_i} & & \searrow^{z_j} \\ \boldsymbol{C}^{i-1} \times \boldsymbol{C}^* \times \boldsymbol{C}^{n-i} & \xrightarrow{z_j \circ z_i^{-1}} & \boldsymbol{C}^{i-1} \times \boldsymbol{C}^* \times \boldsymbol{C}^{n-i} \end{array}$$

$$(\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}),$$

$$z_j \circ z_i^{-1}(v^1, \cdots, v^n) = z_j([v^1, \cdots, v^{i-1}, 1, v^{i+1}, \cdots, v^n])$$

$$= \Big(\frac{v^1}{v^j}, \cdots, \underset{(i)}{\frac{1}{v^j}}, \cdots, \underset{(j)}{\frac{\hat{v^j}}{v^j}}, \cdots, \frac{v^n}{v^j}\Big).$$

显然，$z_j \circ z_i^{-1}$ 是双全纯映射。这样由 $\{(U_i, z_i)\}$ 给出了 $P^n\boldsymbol{C}$ 的一个全纯坐标覆盖，因而 $P^n\boldsymbol{C}$ 是复流形。

特别地，$n=1$时，复射影直线 $P^1\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^1$ 与扩充的复平面

$$\Sigma = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$$

以及 Riemann 球面 S 都是同构的，它们可以看作同一对象。$n=2$ 时，$P^2\boldsymbol{C}$ 是复射影平面。我们讨论的主要对象，就是 $P^2\boldsymbol{C}$ 上的代数曲线。

由于 $P^2\boldsymbol{C}$ 的实维数大于 3，所以已无法在通常的 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中作出几何表示。通常采用一些变通的办法给出示意性的

表示，主要的想法是用实射影平面 P^2R 作为 P^2C 的示意。P^2R 可以视为二维球面 S^2 迭合对径点而成的，P^2R 上的曲线可以视为 S^2 上关于球心为对称的曲线。另一更容易作出的图示法，是沿适当的大圆把表示 P^2R 的 S^2 剖开摊成平面，而把 S^2 在第一卦限内的部分画成平面 R^2 上的一个三角形。或者说选择 R^2 上仿射独立的三点 a_0, a_1, a_2，过它们作一个三角形，以重心坐标为

$$\frac{\xi^0}{\xi^0+\xi^1+\xi^2}, \quad \frac{\xi^1}{\xi^0+\xi^1+\xi^2}, \quad \frac{\xi^2}{\xi^0+\xi^1+\xi^2}$$

的点表示 P^2C 上的点 $[\xi^0, \xi^1, \xi^2]$（这相当于将表示 P^2C 的 S^2 沿大圆

$$\xi^0+\xi^1+\xi^2=0$$

剖开，然后摊成平面）（见图1.8）。

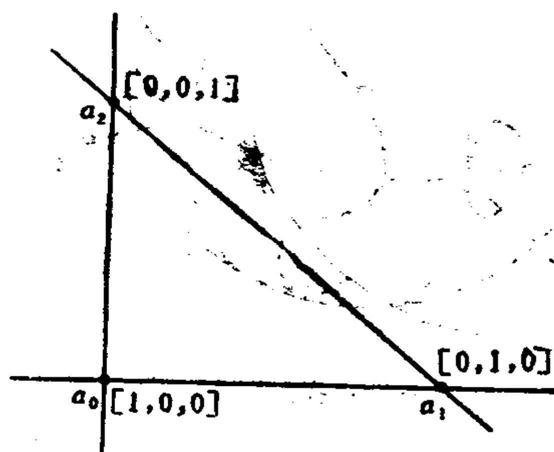


图1.8 射影平面的示意图

例 5 P^2C 上的代数曲线 $\xi\eta=\zeta^2$（仿射方程：$xy=1$）在实射影平面上的图形如图1.9(a)和(b)。

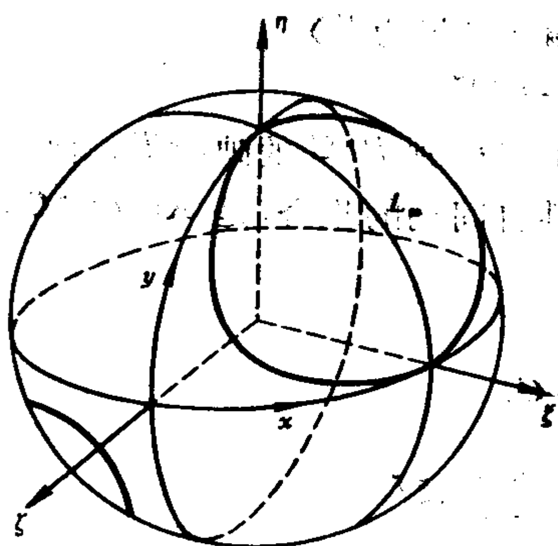


图 1.9(a)

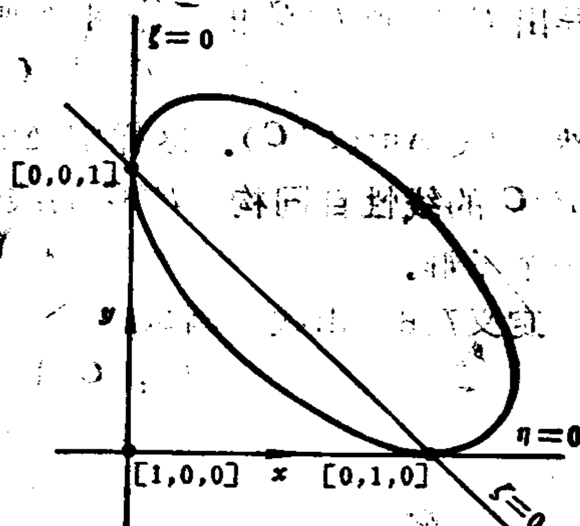


图 1.9(b)

例 6　P^2C 上的代数曲线

$$\zeta\eta^2-\xi^3+\zeta^2\xi=0$$

（仿射方程：$y^2-x^3+x=0$）在实射影平面上的图形如图 1.10(a)和(b)。

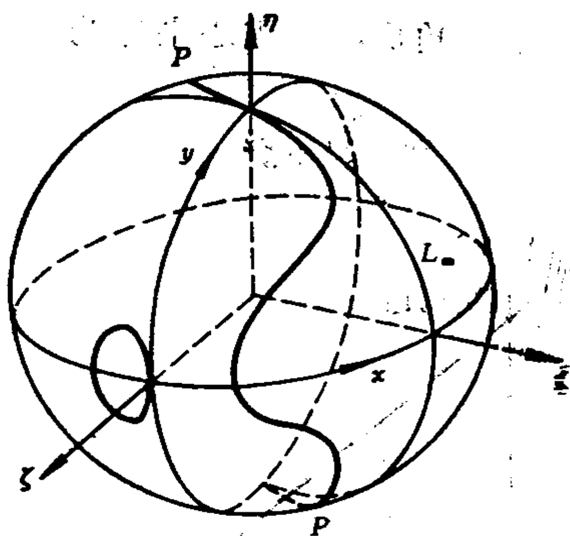


图　1.10(a)

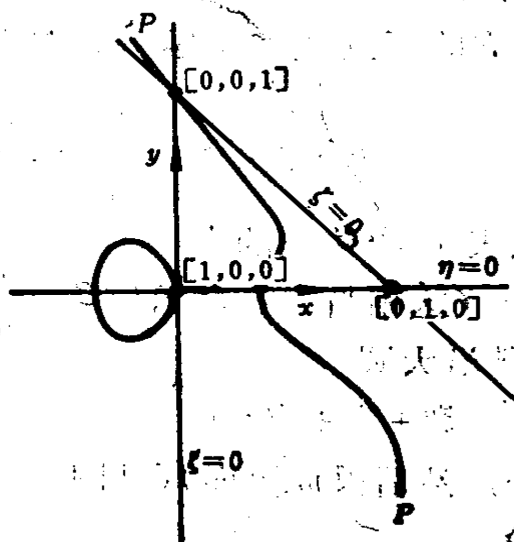


图　1.10(b)

定义7.5　可逆线性映射（用矩阵表示）

$$T:\ C^{n+1}\to C^{n+1}$$

诱导出 P^nC 到 P^nC 的一个可逆映射（仍记为T）

$$T:\ P^nC\to P^nC,$$

显然，$T\in \mathrm{Aut}(P^nC)$。这样定义的 P^nC 到 P^nC 的映射T，称之为 P^nC 的**线性自同构**。P^nC 的线性自同构的集合，是 $\mathrm{Aut}(P^nC)$ 的一个子群。

定义7.6　由线性函数

$$L^i:\ C^{n+1}\to C,$$

$$\xi\mapsto\sum_{j=0}^{n}l_j^i\xi^j$$

$$(i=1,2,\cdots,k)$$

定义的 P^nC 的子集

$$V=\{\xi\in P^nC \mid L^1(\xi)=L^2(\xi)=\cdots=L^k(\xi)=0\}$$

称为是 P^nC 的**射影线性子空间**。(由 $L^i(\lambda\xi)=\lambda L^i(\xi)$,容易看出上述定义是合理的。)

注记7.7 如果

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} l_0^1 & \cdots & l_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_0^k & \cdots & l_n^k \end{pmatrix}=k,$$

必要时改变变元的次序(这是 P^nC 中的一个线性自同构),可设

$$\det\begin{pmatrix} l_{n-k+1}^1 & \cdots & l_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n-k+1}^k & \cdots & l_n^k \end{pmatrix}\neq 0.$$

考虑 P^nC 的线性自同构

$$\begin{cases}\eta^i=\xi^i & (i=0,1,\cdots,n-k),\\ \eta^j=\sum\limits_{s=0}^{n} l_s^{j-n+k}\xi^s & (j=n-k+1,\cdots,n).\end{cases}$$

经过这样的变换,V 成为

$$V'=\{\eta\in P^nC \mid \eta^{n-k+1}=\cdots=\eta^n=0\}.$$

我们看到,在同构的意义下

$$V'=P^{n-k}C\subset P^nC.$$

这说明,经过 P^nC 中适当的线性自同构,它的射影线性子空间可以表现为标准嵌入 P^nC 的较低维的复射影空间。在上面的情形下,我们称 V 为 P^nC 的 $n-k$ 维射影线性子空间。一维射影线性子空间称为**直线**。P^2C 中的两条直线或者重合,或者恰交于一点。

定义7.8 P^nC 中的 k 个点 $p_1,\cdots,p_k$ 称为是**处于一般位置**,如果其中任意 l 个点

$$p_{i_1},p_{i_2},\cdots,p_{i_l}\quad(l\leqslant n+1)$$

不在 P^nC 的一个 $l-2$维射影线性子空间上。

例 7 在 P^2C 中,两点 p_1,p_2处于一般位置,当且仅当它们不

重合；三点 p_1, p_2, p_3 处于一般位置，当且仅当它们不在一条直线上；四点 p_1, p_2, p_3, p_4 处于一般位置，当且仅当其中任意三点处于一般位置。

习题7.1 试证

$$\mathrm{Aut}(P^1\boldsymbol{C}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc \neq 0 \right\}.$$

习题7.2 任给 $P^2\boldsymbol{C}$ 中处于一般位置的四个点 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$，试证存在唯一的线性自同构 T：$P^2\boldsymbol{C} \to P^2\boldsymbol{C}$，使得

$$T(\xi_i) = \eta_i \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

这里

$$\eta_0 = [1, 0, 0], \qquad \eta_1 = [0, 1, 0],$$
$$\eta_2 = [0, 0, 1], \qquad \eta_3 = [1, 1, 1].$$

§8 代 数 簇

本节介绍代数簇的概念。先引入一些一般的记号。

记号

$R = \boldsymbol{C}[x^1, x^2, \cdots, x^n]$

$= n$ 个变元 $x^1, \cdots, x^n$ 的复系数多项式环；

$J = \{f_1, \cdots, f_k\}$

$= R$ 中由 $f_1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, f_k(x^1, \cdots, x^n)$ 生成的理想；

$S^d = n+1$ 个变元 $\xi^0, \xi^1, \cdots, \xi^n$ 的 d 次齐次多项式组成的线性空间；

$S = \bigoplus_{d \geq 0} S^d$

$= n+1$ 个变元 $\xi^0, \xi^1, \cdots, \xi^n$ 的各次齐次多项式生成的分次代数；

$I = \{F_1, \cdots, F_k\}$

$= S$ 中由 $F_1(\xi^0, \cdots, \xi^n), \cdots, F_k(\xi^0, \cdots, \xi^n)$ 生成的齐次理

想，这里$F_i\in S^{d_i}(i=1,\cdots,k)$。

易验证由 $F_1,\cdots,F_k$生成的齐次理想为

$$I=\left\{\sum_{i=1}^{k}H^iF_i \mid H^i\in S\right\}.$$

定义8.1 一个**仿射代数簇**是 $\boldsymbol{C}^n$上的形如

$$V_0=\{x\in \boldsymbol{C}^n \mid f_1(x)=\cdots=f_k(x)=0\}$$

的子集，这里 $f_i\in R(i=1,\cdots,k)$。特别地，如果 $k=1$，V_0称为**仿射代数超曲面**，这时 $\deg f_1$称为V_0的**次数**。$\boldsymbol{C}^2$ 中的仿射代数超曲面称为**平面仿射代数曲线**。

定义8.2 一个**射影代数簇**(简称**代数簇**)是 $P^n\boldsymbol{C}$ 中形如

$$V=\{\xi\in P^n\boldsymbol{C} \mid F_1(\xi)=\cdots=F_k(\xi)=0\}$$

的子集，这里 $F_i\in S^{d_i}(i=1,\cdots,k)$。因为

$$F_i(\lambda\xi)=\lambda^{d_i}F_i(\xi),$$

此定义是合理的。显然V 可以写成

$$V=\{\xi\in P^n\boldsymbol{C} \mid F(\xi)=0,\quad \forall F\in I\},$$

这里 $I=\{F_1,\cdots,F_k\}$。特别地，如果$k=1$，V 称为**射影代数超曲面**，这时 $\deg F_1$ 称为V的**次数**。$P^2\boldsymbol{C}$中的射影代数超曲面称为**平面射影代数曲线**，简称**平面代数曲线**。

$\boldsymbol{C}^n$可以用标准方式嵌入 $P^n\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^n\cup P^{n-1}\boldsymbol{C}$：

$$\boldsymbol{C}^n\to P^n\boldsymbol{C},$$

$$(x^1,\cdots,x^n)\mapsto[1,x^1,\cdots,x^n].$$

这时 $\boldsymbol{C}^n$中的仿射代数簇与 $P^n\boldsymbol{C}$ 中的射影代数簇之间存在着确定的对应关系。

定理8.3 设$\boldsymbol{C}^n$以标准方式嵌入$P^n\boldsymbol{C}$。这时$\boldsymbol{C}^n$中的任意仿射代数簇V_0以确定的方式对应着 $P^n\boldsymbol{C}$ 中的一个射影代数簇V，使得

$$V\cap \boldsymbol{C}^n=V_0.$$

反过来，$P^n\boldsymbol{C}$ 中的任意射影代数簇V 也以确定的方式决定 $\boldsymbol{C}^n$ 中的一个仿射代数簇 V_0，使得

$$V_0 = V \cap \boldsymbol{C}^n.$$

证明 任给仿射代数簇

$$V_0 = \{x \in \boldsymbol{C}^n \mid f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\},$$

命

$$F_i(\xi^0, \cdots, \xi^n) = (\xi^0)^{\deg f_i} f_i\left(\frac{\xi^1}{\xi^0}, \cdots, \frac{\xi^n}{\xi^0}\right),$$
$$i = 1, 2, \cdots, k.$$

则射影代数簇

$$V = \{\xi \in P^n\boldsymbol{C} \mid F_1(\xi) = \cdots = F_k(\xi) = 0\}$$

满足

$$V \cap \boldsymbol{C}^n = V_0.$$

反过来，对于射影代数簇

$$V = \{\xi \in P^n\boldsymbol{C} \mid F_1(\xi) = \cdots = F_k(\xi) = 0\},$$

命

$$f_i(x^1, \cdots, x^n) = F_i(1, x^1, \cdots, x^n), \quad i = 1, \cdots, k.$$

则仿射代数簇

$$V_0 = \{x \in \boldsymbol{C}^n \mid f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\}$$

满足

$$V_0 = V \cap \boldsymbol{C}^n. \quad \blacksquare$$

注记8.4 如果不计 $P^{n-1}\boldsymbol{C} = P^n\boldsymbol{C} \backslash \boldsymbol{C}^n$ 这样的分支，上述对应关系是一对一的。

习题8.1 画出曲线

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2q+2} (x - a_i)$$

的实图形，这里$a_i (i = 1, \cdots, 2q + 2)$是实数，满足

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{2q+2}.$$

(如果 $f_1, \cdots, f_k$是实系数多项式，

$$V_0 = \{x \in \boldsymbol{C}^n \mid f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_k(x) = 0\}$$

是由 $f_1, \cdots, f_k$ 定义的仿射代数簇，我们把 $\boldsymbol{R}^n \cap V_0$称为$V_0$的实图

形。同样地，对于由实系数齐次多项式定义的射影代数簇

$$V=\{\xi\in P^n\mathbf{C}\mid F_1(\xi)=\cdots=F_k(\xi)=0\},$$

我们把 $P^n\mathbf{R}\cap V$ 称为V的实图形。）

定义8.5 给定 $P^n\mathbf{C}$ 中的射影超曲面

$$C=\{\xi\in P^n\mathbf{C}\mid F(\xi)=0\}\quad(F\in S^d),$$

我们可以作因式分解

$$F=F_1^{m_1}\cdots F_l^{m_l},$$

这里 $F_i(i=1,\cdots,l)$ 是不可约齐次多项式。如果不计非零常数因子，这种分解是唯一确定的。相应于这种分解式，我们记

$$C=m_1C_1+\cdots+m_lC_l,$$

这里

$$C_j=\{\xi\in P^n\mathbf{C}\mid F_j(\xi)=0\}\quad(j=1,\cdots,l)$$

称为是C的**不可约分支**，m_j 称为是 C_j 含于C中的**重数**。

特别地，如果F本身已是不可约的，则称C为**不可约超曲面**。

例1 考虑 d 次平面代数曲线 $C=\{\xi\in P^2\mathbf{C}\mid F(\xi)=0\}$。

a) $d=1$。F是线性齐次函数，C是一条直线。

b) $d=2$。有两种情形：

(1) F不可约，则C是不可约圆锥曲线。所有这样的曲线都是射影等价的，即对于任两条这样的曲线C和C'，存在 $P^2\mathbf{C}$ 的线性自同构T，使得$T(C)=C'$（见习题8.2）。

(2) F可约，则 $F=F_1\cdot F_2$，$\deg F_1=\deg F_2=1$。这时或者

$$F_2\neq\lambda F_1,$$

C是两相交直线；或者

$$F_2=\lambda F_1,$$

C是两重合直线，即一直线计算两次。

习题8.2 试证任意两条不可约圆锥曲线C和C'都是射影等价的。

如下面定理所指出，平面代数曲线的次数有明确的几何意义。

定理8.6 设 $C=\{[\xi^0,\xi^1,\xi^2]\in P^2\mathbf{C}\mid F(\xi^0,\xi^1,\xi^2)=0\}$ 是 d 次代数曲线($F\in S^d$)，则对于任意一条一般直线(即不是 C 的一个分支的直线) L 都有

$$\#(C\cap L)=d.$$

这里$\#(C\cap L)$表示C与L的交点个数(重交点重复计数)。

证明 经适当的线性坐标变换可以假定

$$L=\{[\xi^0,\xi^1,\xi^2]\in P^2\mathbf{C}\mid \xi^0=0\}.$$

因为L不含于C，ξ^0不能整除F。必要时再经过形如

$$\begin{cases}\xi^0=\xi'^0,\\ \xi^1=\xi'^1+\lambda\xi'^2,\\ \xi^2=\xi'^2\end{cases}$$

的坐标变换(λ是适当的复数)，则可设

$$F(\xi^0,\xi^1,\xi^2)=(\xi^2)^d+\text{含 }\xi^2\text{ 较低次的项}.$$

C与L的交点由方程

$$F(0,\xi^1,\xi^2)=0$$

给出。我们有

$$\#\{F(0,\xi^1,\xi^2)=0\}$$
$$=\#\{F(0,\xi^1,\xi^2)=0,\ \xi^1\neq0\}+\#\{F(0,0,\xi^2)=0\}.$$

设

$$f(x)=F(0,1,x)=x^d+\text{含 }x\text{ 较低次的项},$$

则

$$\#\{F(0,\xi^1,\xi^2)=0,\ \xi^1\neq0\}=\#\{x\in\mathbf{C}\mid f(x)=0\}=d.$$

而 $F(0,0,\xi^2)=(\xi^2)^d\neq0$，所以

$$\#\{F(0,0,\xi^2)=0\}=0.$$

这样，我们得到

$$\#(C\cap L)=d. \quad \blacksquare$$

§9 光滑点，切空间，隐函数定理

对仿射与射影两种情形，分别叙述有关定义。

定义9.1(仿射情形) 设

$$V_0=\{x\in C^n\,|\,f_1(x)=\cdots=f_k(x)=0\}$$

是仿射代数簇。一点$p\in V_0$称为是V_0的光滑点，如果存在p点的一个邻域W及$\{f_{i_1},\cdots,f_{i_l}\}\subset\{f_1,\cdots,f_k\}$满足

a) $V_0\cap W=\{x\in W\,|\,f_{i_1}(x)=f_{i_2}(x)=\cdots=f_{i_l}(x)=0\}$;

b) $\mathrm{rank}\left(\dfrac{\partial f_{i_\mu}(x)}{\partial x^j}\bigg|_p\right)=l$.

(这时l和$n-l$分别称为代数簇V_0在p点的余维数和维数。)

对于光滑点$p\in V_0$，我们把C^n的仿射子空间

$$T_p(V_0)=\left\{y\in C^n\,\Big|\,\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{i_\mu}(x)}{\partial x^j}\bigg|_p(y^j-p^j)=0,\ \mu=1,\cdots,l\right\}$$

称为是V_0在p点的切空间。

不是光滑点的点$q\in V_0$称为奇点。

V_0称为是光滑的，如果它的所有点都是光滑点(不存在奇点)。

特别地，如果$V_0=\{x\in C^n\,|\,f(x)=0\}$是仿射代数超曲面，那么$p$是$V_0$的光滑点意味着$f(p)=0$，并且存在$j(1\leqslant j\leqslant n)$，使得

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^j}\bigg|_p\neq0.$$

习题9.1 求关于a,b的条件以保证

$$y^2=4x^3+ax+b$$

是一条光滑曲线。

提示 可能出现麻烦之处是使得

$$f=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

的点。

定义9.2(射影情形) 设

$$V=\{\xi\in P^nC\mid F_1(\xi)=\cdots=F_k(\xi)=0\}$$

是射影代数簇。一点 $p\in V$ 称为是 V 的**光滑点**，如果存在 p 的一个邻域 W 及 $\{F_{i_1},\cdots,F_{i_l}\}\subset\{F_1,\cdots,F_k\}$ 满足

a) $V\cap W=\{\xi\in W\mid F_{i_1}(\xi)=\cdots=F_{i_l}(\xi)=0\}$;

b) $\operatorname{rank}\left(\left.\frac{\partial F_{i_\mu}(\xi)}{\partial\xi^i}\right|_p\right)=l$.

(这时 l 和 $n-l$ 分别称为代数簇 V 在 p 点的**余维数**和**维数**。)

对于光滑点 $p\in V$，我们把 P^nC 的射影线性子空间

$$T_p(V)=\left\{\eta\in P^nC\mid\sum_{i=1}^n\left.\frac{\partial F_{i_\mu}(\xi)}{\partial\xi^i}\right|_p\eta^i=0,\quad\mu=1,\cdots,l\right\}$$

称为是 V 在 p 点的**切空间**。(由于

$$\operatorname{rank}\left(\left.\frac{\partial F_{i_\mu}(\xi)}{\partial\xi^i}\right|_p\right)=l,$$

易见 $T_p(V)\cong P^{n-l}C$。)

不是光滑点的点 $q\in V$ 称为**奇点**。

V 称为是**光滑的**，如果它的所有点都是光滑点(不存在奇点)。

特别地，如果 $V=\{\xi\in P^nC\mid F(\xi)=0\}$ 是射影代数超曲面，那么 p 是 V 的光滑点意味着 $F(p)=0$，并且存在 $j(0\leqslant j\leqslant n)$，使得

$$\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial\xi^j}\right|_p\neq0.$$

而 q 是 V 的奇点意味着

$$F(q)=\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^0}\right|_q=\cdots=\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^n}\right|_q=0.$$

但由齐次函数的 Euler 公式

$$\sum_{j=0}^{n}\xi^j\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^j}=(\deg F)\cdot F(\xi),$$

我们看到

$$\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^j}=0(j=0,1,\cdots,n)\ \Rightarrow\ F(\xi)=0.$$

因而 q 是 V 的奇点当且仅当

$$\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^0}\right|_q=\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^1}\right|_q=\cdots=\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^n}\right|_q=0.$$

习题9.2 试证代数簇

$$\begin{cases}\xi^0\xi^3-\xi^1\xi^2=0,\\(\xi^1)^2-\xi^0\xi^2=0,\\(\xi^2)^2-\xi^1\xi^3=0\end{cases}$$

是光滑的。

对于标准嵌入

$$\boldsymbol{C}^n\to P^n\boldsymbol{C},$$
$$(x^1,\cdots,x^n)\mapsto[1,x^1,\cdots,x^n],$$

一定的仿射代数簇 V_0 与一定的射影代数簇 V 互相对应:

$$V_0=V\cap\boldsymbol{C}^n.$$

这两代数簇在一光滑点 $p\to[1,p]$ 处的切空间也有类似的关系。

定理9.3 在上面陈述的条件下有

$$T_pV_0=T_{[1,p]}V\cap\boldsymbol{C}^n.$$

证明 为记号简便起见，仅对超曲面的情形给出证明，一般情形的证明完全类似。

设

$$V_0=\{x\in \boldsymbol{C}^n \mid f(x)=0\},$$
$$V=\{\xi\in P^n\boldsymbol{C} \mid F(\xi)=0\},$$
$$f(x^1,\cdots,x^n)=F(1,x^1,\cdots,x^n).$$

则

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}=\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^i}\right|_{(1,x^1,\cdots,x^n)},\qquad i=1,\cdots,n.$$

记 $p=(p^1,\cdots,p^n)$。设

$$[1,p]=[1,p^1,\cdots,p^n]\in V\cap \boldsymbol{C}^n.$$

按定义有

$$T_{[1,p]}V=\left\{\eta\in P^n\boldsymbol{C} \mid \sum_{i=0}^n \left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^i}\right|_{(1,p)}\eta^i=0\right\}.$$

为考察 $T_{[1,p]}V\cap \boldsymbol{C}^n$，记

$$\eta=[1,y]=[1,y^1,\cdots,y^n].$$

于是

$$T_{[1,p]}V\cap \boldsymbol{C}^n=\left\{y\in \boldsymbol{C}^n \mid \left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^0}\right|_{(1,p)}+\sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^j}\right|_{(1,p)}y^j=0\right\}.$$

但

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^0}\right|_{(1,p)}+\sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^j}\right|_{(1,p)}y^j\\&=\left[\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^0}\right|_{(1,p)}+\sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^j}\right|_{(1,p)}p^j\right]\\&\quad+\sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^j}\right|_{(1,p)}(y^j-p^j),\end{aligned}$$

而按照 Euler 公式

$$\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^0}\right|_{(1,p)}+\sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^j}\right|_{(1,p)}p^j$$

$$= (\deg F)\cdot F(1, p^1\cdots,\ p^n) = 0.$$

所以

$$\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^0}\bigg|_{(1,p)} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^j}\bigg|_{(1,p)} y^j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F(\xi)}{\partial \xi^j}\bigg|_{(1,p)}(y^j - p^j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x^j}\bigg|_{p}(y^j - p^j).$$

我们得到

$$T_{[1,p]}V\cap C^n = \left\{y\in C^n \mid \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x^j}\bigg|_{p}(y^j - p^j) = 0\right\}$$

$$= T_p V_0. \quad \blacksquare$$

P^nC中的代数簇在其光滑点邻近的结构，类似于一个较低维数的复流形。为说明这一事实，将利用全纯隐函数定理。先介绍多复变函数理论的一些方便的记号约定以及将要用到的结果。

同单复变函数的情形一样，我们引入以下的形式记号。

记号

$$dz^j = dx^j + \sqrt{-1}dy^j, \qquad d\overline{z^j} = dx^j - \sqrt{-1}\ dy^j;$$

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z^j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^j}\right);$$

$$df = \sum_j\left(\frac{\partial f}{\partial z^j}dz^j + \frac{\partial f}{\partial \overline{z^j}}d\overline{z^j}\right).$$

由单复变函数论的结果，一个函数 f 关于变元之一z^j是全纯的，必须而且只须

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z^j}} = 0 \quad \text{(Cauchy–Riemann方程)}.$$

引理9.4(Osgood)　f 在开集 $U\subset C^n$ 中全纯的充分必要条件

是它对每一变元 z^j 全纯 $(j=1,\cdots,n)$。

证明 必要性是显然的，今证充分性。设

$$z_0=(z_0^1,\cdots,z_0^n)\in U,$$

由于 f 对每一变元 z^j 全纯 $(j=1,\cdots,n)$，考虑 z_0 邻近的多圆环

$$T(z_0,\varepsilon)=\{\zeta\in C^n \mid |\zeta^j-z_0^j|=\varepsilon,\ j=1,\cdots,n\},$$

对每一变元逐次利用 Cauchy 积分公式得

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{T(z_0,\varepsilon)}\cdots\int\frac{f(\zeta^1,\cdots,\zeta^n)}{(\zeta^1-z^1)\cdots(\zeta^n-z^n)}d\zeta^1\cdots d\zeta^n.$$

由这表达式，利用

$$\frac{1}{\zeta^j-z^j}=\frac{1}{(\zeta^j-z_0^j)-(z^j-z_0^j)}$$

$$=\frac{1}{\zeta^j-z_0^j}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z^j-z_0^j}{\zeta^j-z_0^j}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\zeta^j-z_0^j)^{k+1}}(z^j-z_0^j)^k$$

$$(|z^j-z_0^j|<\varepsilon'<\varepsilon=|\zeta^j-z_0^j|,\ j=1,\cdots,n),$$

立即得到 f 关于所有变元的幂级数

$$f=\sum_{i_1,\cdots,i_n\geq 0}a_{i_1\cdots i_n}(z^1-z_0^1)^{i_1}\cdots(z^n-z_0^n)^{i_n}.\ \blacksquare$$

推论9.5 f 在开集 $U\subset C^n$ 中全纯的充分必要条件是

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j}=0\quad(j=1,\cdots,n)$$

(这称为 Cauchy-Riemann 方程)。

记号 把在原点 $(0,\cdots,0)\in C^n$ 邻近全纯的函数的集合记为 $\mathscr{O}_n$。(注意，$\mathscr{O}_n$ 中各函数全纯的范围可以不同。)

定理9.6（全纯隐函数定理） 设 $f_1,\cdots,f_k\in\mathcal{O}_n$满足

$$\det\left(\frac{\partial f_i(z)}{\partial z^j}\bigg|_{z=0}\right)_{1\leqslant i,\ j\leqslant k}\neq 0.$$

则存在$w_1,\cdots,w_k\in\mathcal{O}_{n-k}$使得在 $(0,\cdots,0)\in\mathbf{C}^n$邻近有

$$f_1(z)=\cdots=f_k(z)=0\Longleftrightarrow z^i=w_i(z^{k+1},\cdots,z^n),$$
$$i=1,2,\cdots,k.$$

证明 利用C^∞隐函数定理，我们能得到C^∞函数$w_1,\cdots,w_k$满足上述要求。剩下的事情只是要验证这些函数$w_1,\cdots,w_k$是全纯的。

记$z'=(z^{k+1},\cdots,z^n)$。对于$k+1\leqslant\alpha\leqslant n$我们有

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial}{\partial\overline{z^\alpha}}f_j(w(z'),z')\\&=\frac{\partial f_j(w(z'),z')}{\partial\overline{z^\alpha}}+\sum_l\left(\frac{\partial f_j(w(z'),z')}{\partial w_l}\times\frac{\partial w_l(z')}{\partial\overline{z^\alpha}}\right)+\sum_l\frac{\partial f_j(w(z'),z')}{\partial\overline{w}_l}\frac{\partial\overline{w}_l(z')}{\partial\overline{z^\alpha}}\\&=\sum_l\frac{\partial f_j(w(z'),z')}{\partial w_l}\frac{\partial w_l(z')}{\partial\overline{z^\alpha}}\end{aligned}$$

$\left(\text{因为}f_j\text{全纯，}\dfrac{\partial f_j}{\partial\overline{z^\alpha}}\text{与}\dfrac{\partial f_j}{\partial\overline{w}_l}\text{都为零，}\alpha=k+1,\cdots,n;\ l=1,\cdots,k\right)$。

对于 $(0,\cdots,0)\in\mathbf{C}^{n-k}$邻近的$z'$应有

$$\det\left(\frac{\partial f_j(w(z'),z')}{\partial w_l}\right)_{1\leqslant j,\ l\leqslant k}\neq 0.$$

由上面推得的等式立即得到

$$\frac{\partial w_l(z')}{\partial\overline{z^\alpha}}=0\qquad(l=1,\cdots,k;\ \alpha=k+1,\cdots,n),$$

即$w_1,\cdots,w_l\in\mathcal{O}_{n-k}$。 ▌

在下面的习题9.4中，要求读者直接用幂级数法证明这定理的一个重要的特殊情形。解题的过程虽然较长，却是一个很好的练习。

以下命题是隐函数定理的一个应用。

命题9.7 设 X 是一个紧复流形，Y 是它的一个闭连通子集。如果存在由 X 的局部坐标邻域组成的 Y 的覆盖 $\{W_i\}$ 及 $f_i^1,\cdots,f_i^l\in\mathscr{O}(W_i)$ 满足

a) 解析方程

$Y\cap W_i=\{p\in W_i \mid f_i^1(p)=\cdots=f_i^l(p)=0\}$；

b) Jacobian 条件

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial(f_i^1,\cdots,f_i^l)}{\partial(z_i^1,\cdots,z_i^n)}\right)_{p\in W_i}=l,$$

则 Y 是一个 $n-l$ 维紧复流形。

证明 只须给出 Y 的局部坐标。必要时对覆盖进行加细，可设

$$W_i=U_i\times V_i\subset \boldsymbol{C}^{n-l}\times\boldsymbol{C}^l,$$

并且存在全纯映射

$$U_i\to V_i,$$
$$u_i\mapsto g_i(u_i)$$

满足

$$(u_i,v_i)\in Y\cap W_i\Longleftrightarrow v_i=g_i(u_i).$$

我们可以取 u_i 作为 Y 在 $Y\cap W_i$ 中的局部坐标，具体验证留作习题。❙

习题9.3 试证上面给出的 u_i 使得 $u_j\circ u_i^{-1}$ 在有定义之处都是双全纯的，从而完成上面定理的证明。

定义9.8 如上面命题中的 Y 称为是 X 的**复子流形**。

不可约代数簇总是连通的（在第二章中，对于平面代数曲线的特殊情形，我们将证明这一结论）。由上面命题，任何光滑的不可约代数簇 $V\subset P^n\boldsymbol{C}$，都是 $P^n\boldsymbol{C}$ 的复子流形。特别地，光滑的不

可约代数曲线（一维光滑不可约代数簇）一定是一个紧 Riemann 面。

习题9.4 设二元幂级数

$$f=\sum_{m,n\geqslant 0} a_{mn}x^m y^n$$

在 $(0,0)\in \boldsymbol{C}^2$ 邻近收敛，并且

$$f(0,0)=a_{00}=0, \qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(0,0)}=a_{01}\neq 0.$$

a) 试证存在唯一形式幂级数

$$y(x)=b_1x+b_2x^2+\cdots=\sum_{j=1}^{\infty}b_jx^j$$

使得

$$f(x,y(x))\equiv 0.$$

b) 试证对适当小的$\rho>0$，幂级数

$$\sum_{j=1}^{\infty}b_jx^j$$

在 $\{x\in\boldsymbol{C}\,|\,|x|<\rho\}$ 收敛。

提示 不失一般性，可设$a_{01}=1$（若不是这样，可用$a_{01}^{-1}\cdot f$代替 f）。我们可以写

$$f=y-c_{10}x-\sum_{m+n\geqslant 2}c_{mn}x^my^n,$$

这里 $c_{mn}=-a_{mn}$。

a) 把 $y(x)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}b_jy^j$ 形式地代入 f 的上述表达式，证明各 b_j 可逐项唯一确定并且表示为 c_{kl} $(k+l\leqslant j)$ 的正系数多项式

$$b_j=P_j(c_{10},c_{20},\cdots,c_{j0},c_{j-1,1},\cdots,c_{0j}).$$

b) 利用 Cauchy 优级数法证明级数

$$y(x)=\sum_{i=1}^{\infty}b_i x^i$$

收敛。由于存在 $r>0$，使得 $|x|\leqslant r$，$|y|\leqslant r$ 时幂级数

$$y-c_{10}x-\sum_{m+n\geqslant 2}c_{mn}x^m y^n$$

收敛，故可设

$$|c_{mn}|\leqslant Mr^{-(m+n)}.$$

记 $\gamma_{10}=Mr^{-1}$，$\gamma_{mn}=Mr^{-(m+n)}$，考虑

$$\varphi(x,z)=z-\gamma_{10}x-\sum_{m+n\geqslant 2}\gamma_{mn}x^m z^n$$

$$=z-Mr^{-1}x-\sum_{m+n\geqslant 2}Mr^{-(m+n)}x^m z^n$$

$$=\left(1+\frac{M}{r}\right)z+M-\sum_{m,n\geqslant 0}M\left(\frac{x}{r}\right)^m\left(\frac{z}{r}\right)^n$$

$$=\left(r+M\right)\frac{z}{r}+M-\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right)}.$$

对 z 解方程 $\varphi(x,z)=0$ 得

$$z=\frac{1-\sqrt{1-4(r+M)Mx/r^2(r-x)}}{2(r+M)/r^2}$$

（取负号是为了使 $z(0)=0$）。z 的这一表达式在

$$|x|<\rho=\frac{r^3}{r^2+4(r+M)M}$$

处可以展成收敛的幂级数

$$z=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x^i.$$

按照与 a）中类似的讨论可知各 β_i 应满足

$$\beta_j = P_j(\gamma_{10}, \gamma_{20}, \cdots, \gamma_{j0}, \gamma_{j-1,1}, \cdots, \gamma_{0j}).$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} |b_j| &= |P_j(c_{10}, c_{20}, \cdots, c_{j0}, c_{j-1,1}, \cdots, c_{0j})| \\ &\leqslant P_j(\gamma_{10}, \gamma_{20}, \cdots \gamma_{j0}, \gamma_{j-1,1}, \cdots, \gamma_{0j}) \\ &= \beta_j. \end{aligned}$$

由此得知幂级数

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j$$

也在 $|x| < \rho$ 时收敛。

§10 紧 Riemann 面到复射影空间的全纯映射

前面已经谈到，紧 Riemann 面的研究与代数曲线的研究有密切的关系。可以说紧 Riemann 面是体现代数曲线**内在性质**的抽象物；而代数曲线则是紧 Riemann 面放入到复射影空间里的实现，与放入方式有关的性质则是代数曲线的**外在性质**。紧 Riemann 面可以嵌入到较高维的复射影空间里去，而一般只能浸入到 P^2C 中去，但可要求只有有限个通常二重点。研究紧 Riemann 面的内在结构与代数曲线在复射影空间的外在几何之间的联系，则是代数曲线论的一项十分重要的任务。

本节讨论与此密切相关的一个问题——紧 Riemann 面到复射影空间的全纯映射。主要结果是

定理10.1 紧 Riemann 面 C 上的任意 $n+1$ 个线性无关的半纯函数 $f_0, f_1, \cdots, f_n$ 按确定的方式给出从 C 到 P^nC 的一个非退化的全纯映射（即象集不全在一个 $n-1$ 维射影线性子空间内的全纯映射）。反过来，C 到 P^nC 的任意一个非退化的全纯映射也都可以由这种方式给出。

在证明这一定理之前，我们先来看一些重要而有趣的例子。

例 1（有理典范曲线） 取 Riemann 球面 $S=P^1C$ 上的 $n+1$ 个线性无关的半纯函数

$$f_0(z)=1, f_1(z)=z, \cdots, f_n(z)=z^n。$$

由此给出一个从 S 到 P^nC 的映射

$$f(z)=[1, z, \cdots, z^n],$$

$$f(\infty)=[0,0,\cdots,1]。$$

容易验证这映射是全纯的。利用 Van der Monde 行列式可以证明这映射是非退化的（见下面习题10.1）。利用齐次坐标，这映射可以写成

$$f([\xi^0,\xi^1])=[(\xi^0)^n,(\xi^0)^{n-1}\xi^1,\cdots,(\xi^1)^n],$$

这里$[\xi^0,\xi^1]$是P^1C中的点。

$n=1$的情形：

$$f([\xi^0,\xi^1])=[\xi^0,\xi^1],$$

这是恒同映射。

$n=2$的情形：

$$f([\xi^0,\xi^1])=[(\xi^0)^2,\xi^0\xi^1,(\xi^1)^2],$$

即

$$\begin{cases}\zeta^0=(\xi^0)^2,\\ \zeta^1=\xi^0\xi^1,\\ \zeta^2=(\xi^1)^2,\end{cases}$$

这里 ζ^0,ζ^1,ζ^2是P^2C中点的齐次坐标。容易看出这是一圆锥曲线

$$\zeta^0\zeta^2-(\zeta^1)^2=0$$

的参数方程，即

$$f(P^1C)=\{[\zeta^0,\zeta^1,\zeta^2]\in P^2C \mid \zeta^0\zeta^2-(\zeta^1)^2=0\}。$$

下面的习题10.1告诉我们，映射 f：$P^1C\to P^nC$ 是单一的。特别地，对于$n=2$ 的情形，f：$P^1C\to P^2C$ 是到圆锥曲线$\zeta^0\zeta^2-(\zeta^1)^2=0$的单、满映射。这说明所有圆锥曲线的抽象 Riemann 面都是 Riemann 球面 $S=P^1$。

$n=3$的情形：

$$f([\xi^0,\xi^1])=[(\xi^0)^3,(\xi^0)^2\xi^1,\xi^0(\xi^1)^2,(\xi^1)^3].$$

即

$$\begin{cases} \zeta^0 = (\xi^0)^3, \\ \zeta^1 = (\xi^0)^2\xi^1, \\ \zeta^2 = \xi^0(\xi^1)^2, \\ \zeta^3 = (\xi^1)^3. \end{cases} \tag{10.1}$$

易验证这是下面的代数簇的参数方程

$$\begin{cases} \zeta^0\zeta^3 - \zeta^1\zeta^2 = 0, \\ (\zeta^1)^2 - \zeta^0\zeta^2 = 0, \\ (\zeta^2)^2 - \zeta^1\zeta^3 = 0. \end{cases} \tag{10.2}$$

此代数簇是光滑的(见习题9.2)，其实图形是如图1.11的一个渐增螺旋线。

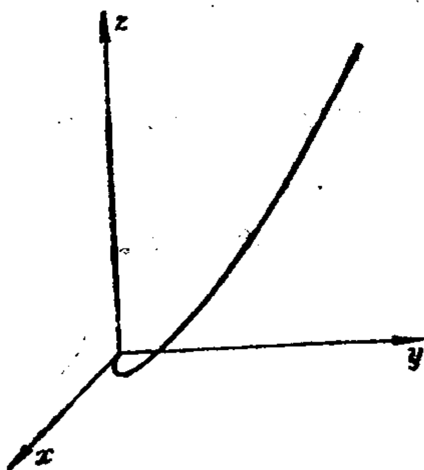


图1.11 代数簇(10.2)的实图形

习题10.1 设

$$f: P^1C \to P^nC$$

是有理典范曲线。试证P^1C中任意一组两两不同的点的象在P^nC中处于一般位置。

提示 利用 Van der Monde 行列式。

习题10.2 试证

a) 有理典范曲线(10.1)是代数簇(10.2)的参数方程；

b）（10.2）中任意两个方程不能给出 $f(P^1\mathbf{C})$。

定义10.2 给定 $\mathbf{C}$ 上的一个格

$$\Lambda=\{m_1w_1+m_2w_2 \mid m_1,\ m_2\in \mathbf{Z}\},$$

以 w_1,w_2 为双周期的 Weierstrass $\mathscr{P}$ 函数定义为满足以下条件的（唯一）半纯函数：

a）双周期性：

$$\mathscr{P}(w+w_i)=\mathscr{P}(w)\quad (i=1,\ 2)\ ;$$

b）极点条件：$\mathscr{P}$的极点全在Λ上，在极点 0 处其 Laurent展式形如

$$\mathscr{P}(w)=w^{-2}+h(w),$$

$h(w)$在O点邻近全纯，并且$h(0)=0$。

我们看到满足条件a)，b)的半纯函数$\mathscr{P}$是唯一的：如果还有半纯函数$\mathscr{Q}$也满足a)，b)，那么$\mathscr{P}(w)-\mathscr{Q}(w)$在 $\mathbf{C}$ 上解析并且有界（由双周期性），所以

$$\mathscr{P}(w)-\mathscr{Q}(w)=\text{const}.$$

但$\mathscr{P}(0)-\mathscr{Q}(0)=0$，所以

$$\mathscr{P}\equiv\mathscr{Q}.$$

习题10.3 试证

a）$\mathscr{P}(-w)=\mathscr{P}(w)$；

b）$\mathscr{P}'^2=4\mathscr{P}^3+a\mathscr{P}+b$（对适当的常数 $a,b\in\mathbf{C}$）。

提示　寻求a使$\mathscr{P}'^2-4\mathscr{P}^3-a\mathscr{P}$没有极点，由双周期性知，它只能是常数$b$。

例2 对于格$\Lambda=\{m_1w_1+m_2w_2 \mid m_1,m_2\in\mathbf{Z}\}$，记

$$\mathbb{C}=\mathbf{C}/\Lambda.$$

这是一个紧 Riemann 面。考虑映射

$$f:\ \mathbb{C}\to P^2\mathbf{C},$$

$$[w]\mapsto[1,\mathscr{P}(w),\mathscr{P}'(w)]$$

（$[w]$表示w所在的模Λ的等价类）。

由习题10.3，我们看到这映射的象落在仿射平面代数曲线

$$y^2 = 4x^3 + ax + b$$

之上。添上无穷远点[0,0,1]，这是$P^2\boldsymbol{C}$中的三次代数曲线

$$zy^2 = 4x^3 + axz^2 + bz^3.$$

为证明定理10.1作准备，先介绍复流形上的有理函数（半纯函数）的概念。

定义10.3 设X是一个复流形，$\{(U_i, g_i, h_i)\}$满足下述条件：

a） $\{U_i\}$是X的开覆盖；

b） $g_i, h_i \in \mathscr{O}(U_i)$，$h_i \not\equiv 0$；

c） 相容性：只要$U_i \cap U_j \neq \varnothing$，在$U_i \cap U_j$上就有

$$g_i h_j \equiv g_j h_i.$$

这时由

$$\varphi = g_i/h_i \quad （在U_i上）$$

给出的X上的函数称为**有理函数（半纯函数）**。

X上全体半纯函数的集合记为$K(X)$，它显然构成一个域。

当X是 Riemann 面（$\dim X = 1$）时，这里定义的半纯函数与以前的定义一致。

注记10.4 对于 $\dim X = n > 1$的情形，一个半纯函数（有理函数）一般不是到$P^1\boldsymbol{C}$的全纯映射。例如：在$\boldsymbol{C}^2$上考虑半纯函数$\varphi = y/x$，当(x, y)沿不同的直线 $y = \lambda x$ 趋于$(0, 0)$时，φ 趋于不同的极限值 λ，因而

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \varphi(x, y)$$

不存在。这说明定义于高维复流形上的半纯函数，可能在某些点不取任何值，甚至不能取值∞。

例3 设

$$P(\xi) = P(\xi^0, \cdots, \xi^n) \in S^d,$$

$$Q(\xi) = Q(\xi^0, \cdots, \xi^n) \in S^d, \quad Q \not\equiv 0.$$

易验证

$$\varphi = \frac{P(\xi)}{Q(\xi)}$$

给出P^nC上的半纯函数。为此，只须取通常的局部全纯坐标

$$U_i=\{\xi=[\xi^0,\cdots,\xi^n]\in P^nC\,|\,\xi^i\neq 0\},$$

$$z_i^j=\frac{\xi^j}{\xi^i}\quad (j\neq i),$$

并取

$$g_i(z_i^0,\cdots,z_i^{i-1},z_i^{i+1},\cdots,z_i^n)=P(z_i^0,\cdots,z_i^{i-1},1,z_i^{i+1},\cdots,z_i^n)$$

$$=P\left(\frac{1}{\xi^i}\xi\right)=\left(\frac{1}{\xi^i}\right)^d P(\xi),$$

$$h_i(z_i^0,\cdots,z_i^{i-1},z_i^{i+1},\cdots,z_i^n)$$
$$=Q(z_i^0,\cdots,z_i^{i-1},1,z_i^{i+1},\cdots,z_i^n)$$

$$=Q\left(\frac{1}{\xi^i}\xi\right)=\left(\frac{1}{\xi^i}\right)^d Q(\xi).$$

显然 g_i,h_i是全纯函数，它们满足相容性条件并且

$$h_i\neq 0,$$

而

$$\varphi=\frac{P}{Q}=\frac{g_i}{h_i}\quad (\text{在}U_i\text{上}).$$

例4 特别地，在上例中取

$$P(\xi)=\xi^i,\qquad Q(\xi)=\xi^0,$$

我们得到P^nC上的半纯函数

$$x^i=\frac{\xi^i}{\xi^0}.$$

(此半纯函数限制到$U_0=C^n$上就是第i个坐标，因而记为x^i。)

命题10.5 设C是Riemann面，X是复流形，$\varphi\in K(X)$由$\{(U_i,g_i,h_i)\}$给出，f：$C\to X$是全纯映射，

$$f(C)\not\subset\bigcup_i\{h_i=0\}.$$

则
$$f^*\varphi = \varphi \circ f \in K(C)。$$

证明 置 $W_i = f^{-1}(U_i)$，则 $f^*\varphi = \varphi \circ f$ 是由
$$\{(W_i, f^*g_i, f^*h_i)\}$$
给出的半纯函数：
$$f^*\varphi = \varphi \circ f = \frac{g_i \circ f}{h_i \circ f} = \frac{f^* g_i}{f^* h_i} \quad (\text{在} W_i)$$
($f(C) \not\subset \bigcup\limits_i \{h_i = 0\}$ 保证了 $f^*h_i = h_i \circ f \not\equiv 0$)。 ▌

现在，我们可以来证明本节开始时给出的重要定理了。

定理10.1的证明 设 $f_0, f_1, \cdots, f_n$ 是 C 上 $n+1$ 个线性无关的半纯函数，考虑由 C 到 $P^n\mathbf{C}$ 的映射：
$$f(p) = [f_0(p), f_1(p), \cdots, f_n(p)]。$$
除去一些例外的点（$f_0, f_1, \cdots, f_n$ 全为 0 的点及各 f_i 的极点），f 有确切定义并且是局部全纯的。我们指出这映射可以全纯地开拓到整个 C 上。设 q 是 C 上的例外点之一，则对于使得 $z(q) = 0$ 的 C 的局部坐标，在 q 点邻近有
$$f_i = z^{\nu_i} h_i(z), \quad h_i(0) \neq 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n)。$$
取
$$\nu = \min\{\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_n\},$$
则
$$\begin{aligned} f(z) &= [z^{-\nu} f_0(z), \cdots, z^{-\nu} f_n(z)] \\ &= [z^{\nu_0 - \nu} h_0(z), \cdots, z^{\nu_n - \nu} h_n(z)]。\end{aligned}$$
这在 $z = 0$ 处已有定义，并且在这点及邻近也是全纯的。例如，如果 $\nu = \nu_0$，则
$$f(z) = [h_0(z), z^{\nu_1 - \nu_0} h_1(z), \cdots, z^{\nu_n - \nu_0} h_n(z)]$$
$$= \left[1, z^{\nu_1 - \nu_0} \frac{h_1(z)}{h_0(z)}, \cdots, z^{\nu_n - \nu_0} \frac{h_n(z)}{h_0(z)}\right]。$$
$f_0, f_1, \cdots, f_n$ 的线性无关条件保证了 f 的象集不会全落到某个 $n-1$

维射影线性子空间之中，因而 f 是非退化的。

反过来，设给定从 C 到 $P^n\boldsymbol{C}$ 的非退化全纯映射 f。考虑 P^n 上的半纯函数 $x^1, \cdots, x^n$。由于

$$\{\xi \in P^n\boldsymbol{C} \mid \xi^0 = 0\} \cong P^{n-1}\boldsymbol{C},$$

而 f 非退化，因而

$$f(C) \not\subset \{\xi \in P^n\boldsymbol{C} \mid \xi^0 = 0\}.$$

于是 $f_i = f^*x^i = x^i \circ f$ 是 C 上半纯函数 $(i = 1, \cdots, n)$，并且

$$1, f_1, \cdots, f_n$$

线性无关（如果它们线性相关，则 f 的象集将全落在某个 $n-1$ 维射影线性子空间内）。∎

第二章　正则化定理及其应用

本章讨论平面代数曲线的正则化并给出若干十分重要的应用。所谓正则化，就是给不可约代数曲线某种全纯的参数表示，这种参数表示的定义域是适当的紧 Riemann 面。我们将看到，正则化在一定意义下是唯一的。

§1　平面代数曲线的奇点

考虑平面代数曲线

$$C=\{[z,x,y]\in P^2\mathbf{C}\mid F(z,x,y)=0\}.$$

根据隐函数定理，C在光滑点邻近的结构是比较简单的——在光滑点邻近 C 局部地双全纯地对应于$\mathbf{C}$上的一块开集。可能出现麻烦的点是**奇点**，即使得

$$\frac{\partial F}{\partial z}(p)=\frac{\partial F}{\partial x}(p)=\frac{\partial F}{\partial y}(p)=0$$

的点 p。让我们来看一看在奇点处将会出现一些什么情况。

设 p 是平面代数曲线 C 上任意一点，选择 $P^2\mathbf{C}$ 的坐标使 $p=[1,0,0]$；仍设C的方程为 $F(z,x,y)=0$，记

$$f(x,y)=F(1,x,y).$$

则 $f(x,y)=0$对应的曲线是 $C\cap\mathbf{C}^2$。这里认为$\mathbf{C}^2$以标准方式嵌入 $P^2\mathbf{C}$：

$$\mathbf{C}^2\to P^2\mathbf{C},$$

$$(x,y)\mapsto[1,x,y].$$

把$f(x,y)$写成次数递增的一些齐次多项式之和：

$$f(x,y)=f_k(x,y)+f_{k+1}(x,y)+\cdots+f_d(x,y),$$

这里$f_j(x,y)(j=k,\cdots,d)$是j次齐次多项式，$f_k\neq 0$。由于$f(0,0)=0$，必有$k\geq 1$。

如果$k=1$，那么

$$f_1(x,y)=ax+by\neq 0,$$

即

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(0,0)}=a\neq 0 \text{ 或者 } \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(0,0)}=b\neq 0.$$

这意味着$p=(0,0)$是C的一个光滑点。这时C在p点有唯一切线：

$$f_1(x,y)=ax+by=0,$$

因而我们又说p是C的一个**简单点**。

要使p是C的一个奇点，必须而且只须$k\geq 2$。如果$k=2$，那么

$$f_0\equiv f_1\equiv 0,$$

而

$$f_2(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2\neq 0;$$

C在p点有两条（相交或者相重合的）切线，它们由方程

$$f_2(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=0$$

给出。这时我们说p是C的一个**二重点**。

类似地，如果$k=3$，那么C在P点有三条切线(重切线重复计数)，它们满足方程

$$f_3(x,y)=0,$$

这时我们说p是C的一个**三重点**。

一般地，如果

$$f_0\equiv f_1\equiv\cdots\equiv f_{k-1}\equiv 0,\quad f_k\neq 0,$$

那么C在p点有k条切线(重切线重复计数)，它们由方程

$$f_k(x,y)=0$$

给出。这时我们称p为C的一个**k重点**。

定义1.1 p称为是C的一个**通常k重点**，如果p是C的一个k重点并且C在这点的k条切线都不相重合。

例1　考察代数曲线C：

$$x^3 - x^2 + y^2 = 0.$$

我们有

$$f_0 \equiv f_1 \equiv 0,$$

$$f_2(x, y) = -x^2 + y^2 = (y - x)(y + x).$$

因而原点(0, 0)是C的一个通常二重点。这曲线的实图形见图2.1。

例2　考察代数曲线C

$$x^3 + x^2 + y^2 = 0.$$

我们有

$$f_0 \equiv f_1 \equiv 0,$$

$$f_2(x, y) = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy).$$

原点(0, 0)也是 C 的一个通常二重点。这曲线的实图形是迷向的（见图2.2）。

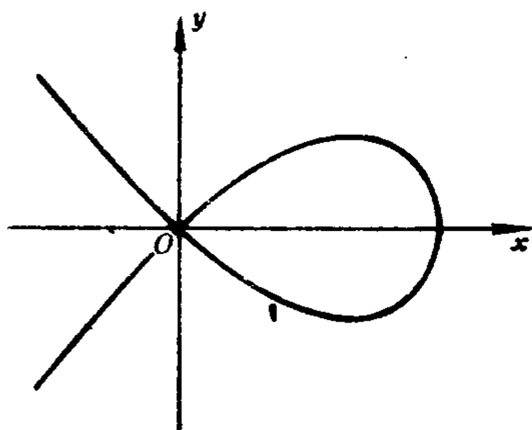


图　2.1

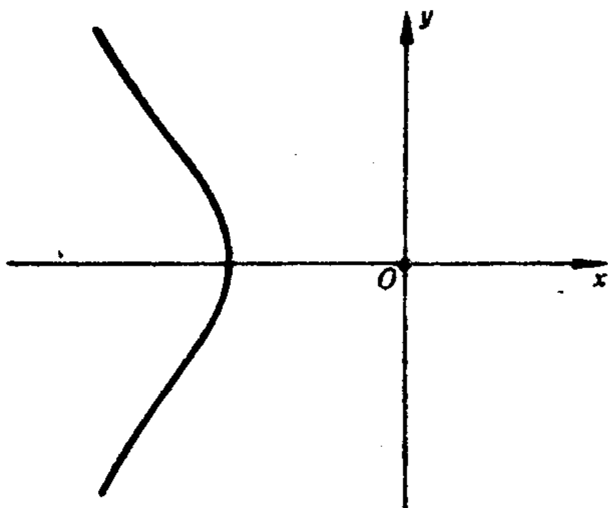


图　2.2

例3　考察曲线C

$$x^3 - y^2 = 0.$$

我们有

$$f_0 \equiv f_1 \equiv 0, \qquad f_2(x, y) = y^2.$$

此例中的原点(0, 0)是非通常二重点——尖点(见图2.3)。

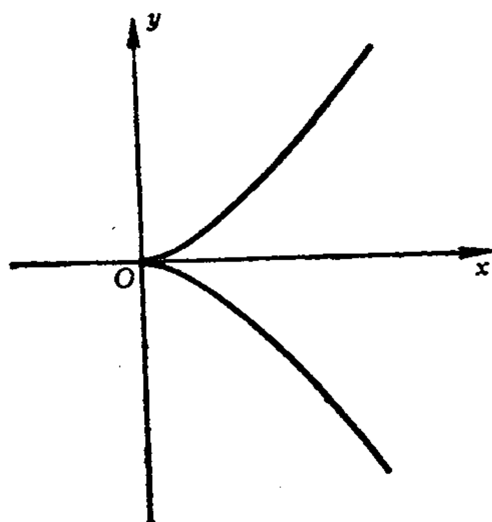


图 2.3

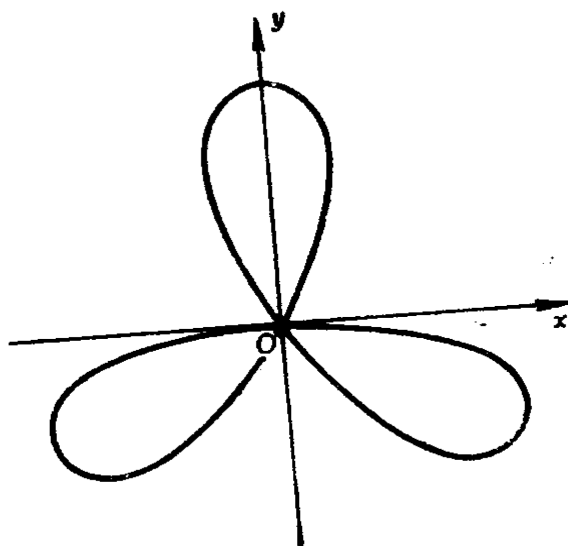


图 2.4

习题1.1 试证原点(0, 0)是以下曲线的通常三重点：

$$(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3=0。$$

(利用极坐标方程容易作出这曲线的实图形，见图2.4。)

§2 不可约平面代数曲线的连通性

首先，我们指出平面代数曲线 C 的奇点集合 $\dot{S}$ 是一个有限点集。为此，我们需要讨论代数多项式的结式与判别式。

引理2.1 设 $\boldsymbol{D}$ 是一个唯一分解整环，

$$f(x)=a_0x^m+\cdots+a_m \quad (a_0\neq 0),$$

$$g(x)=b_0x^n+\cdots+b_n$$

是 $\boldsymbol{D}$ 上多项式。则 f 与 g 有非平凡公因式的充分必要条件是：存在不都是 0 的两个多项式 F ,$G\in \boldsymbol{D}[x]$，满足

$$\deg F<m, \quad \deg G<n, \quad fG=gF。$$

证明 由代数学中熟知的 Gauss引理，$\boldsymbol{D}[x]$也是唯一分解整

环。设 h 是 f 和 g 的非平凡公因式，则

$$f = Fh, \quad F \in \boldsymbol{D}[x], \quad \deg F < m,$$
$$g = Gh, \quad G \in \boldsymbol{D}[x], \quad \deg G < n.$$

由此即得

$$fG = gF.$$

反过来，如果存在不都是 0 的两个多项式 $F, G \in \boldsymbol{D}[x]$ 满足

$$\deg F < m, \quad \deg G < n, \quad fG = gF,$$

那么 f 的非平凡因式不能都是 F 的因式（因为 $\deg F < \deg f$）。由唯一分解性质，必有 f 的一个非平凡因式能整除 g。▌

把上面引理中的多项式 F, G 明确地写成

$$F(x) = A_0 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1},$$
$$G(x) = B_0 x^{n-1} + \cdots + B_{n-1}.$$

对 $fG = gF$ 两边的系数加以比较就得到：

$$\begin{aligned}
a_0 B_0 &= b_0 A_0, \\
a_1 B_0 + a_0 B_1 &= b_1 A_0 + b_0 A_1, \\
&\cdots\cdots \\
a_m B_{n-1} &= b_n A_{m-1}.
\end{aligned}$$

将上式看作是关于 $B_0, \cdots, B_{n-1}, A_0, \cdots, A_{m-1}$ 的齐次线性方程组，则它有非零解的充分必要条件是系数行列式等于 0：

$$\underbrace{\begin{vmatrix}
a_0 & & & & b_0 & & & \\
a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\
\vdots & a_1 & \ddots & & \vdots & b_1 & \ddots & \\
\vdots & \vdots & & a_0 & \vdots & \vdots & & \\
\vdots & \vdots & & a_1 & b_n & \vdots & & b_0 \\
a_m & \vdots & & \vdots & & b_n & & b_1 \\
 & a_m & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\
 & & & a_m & & & & b_n
\end{vmatrix}}_{n\text{列} \qquad\qquad m\text{列}} = 0.$$

把这行列式稍作变形，我们可以将所得结果陈述为下述定理。

定理2.2 设 $\boldsymbol{D}$是唯一分解整环，

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m \quad (a_0\neq 0),$$
$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$$

是 $\boldsymbol{D}$上两多项式。则 f 与 g 有非平凡公因式的充分必要条件是行列式

$$\mathscr{R}(f,g)=0,$$

这里

$$\mathscr{R}(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_m & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

定义2.3 上面给出的行列式$\mathscr{R}(f,g)$称为是 f 与 g 的结式。

推论2.4 在定理2.2的假设条件下，存在多项式$\alpha,\beta\in\boldsymbol{D}[x]$，$\deg\alpha<n$，$\deg\beta<m$，使得

$$\alpha(x)f(x)+\beta(x)g(x)=\mathscr{R}(f,g).$$

证明 把结式$\mathscr{R}(f,g)$的第$m+n$列第 i 行元素的代数余子式记为 A_i，并记

$$\alpha(x)=A_1x^{n-1}+\cdots+A_n,$$
$$\beta(x)=A_{n+1}x^{m-1}+\cdots+A_{n+m}.$$

则容易验证

$$\alpha(x)f(x)+\beta(x)g(x)=\mathscr{R}(f,g). \quad \blacksquare$$

定义2.5 设$\boldsymbol{D}$是唯一分解整环，则 $f\in\boldsymbol{D}[x]$ 与其导出多项式 $f'\in\boldsymbol{D}[x]$ 的结式

$$\mathscr{D}(f)=\mathscr{R}(f,f')$$

称为是 f 的判别式。

推论2.6 设$\boldsymbol{D}$是唯一分解整环，则 $f\in\boldsymbol{D}[x]$有重因式的充分必要条件是它的判别式等于 0：

$$\mathscr{D}(f)=\mathscr{R}(f,f')=0.$$

引理2.7 设C是平面代数曲线．则可选择坐标系使C具有以下形式的仿射方程

$$f(x,y)=y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_n(x)=0,$$

这里 $a_j(x)\in\boldsymbol{C}[x]$，$\deg a_j(x)\leqslant j$ 或者 $a_j(x)=0$。

证明 设曲线C的仿射方程为

$$g(x,y)=0,\qquad \deg g=n.$$

如果g不具有所要求的形式，则作适当的坐标变换

$$\begin{cases} x=x'+\lambda y', \\ y=\qquad y' \end{cases}\qquad (\lambda\text{是待定常数}).$$

考虑 $g(x'+\lambda y',y')$ 中 y'^n 项的系数 $b(\lambda)$，易见它是λ的一个非零多项式，因而只对有限个λ取 0 值。我们总可选择λ使$b(\lambda)\neq0$。对选定的λ，记

$$f(x',y')=\frac{1}{b(\lambda)}g(x'+\lambda y',y').$$

则在坐标系$[O;x',y']$之中，C的仿射方程

$$f(x',y')=0$$

就具有所要求的形式。▌

定理2.8 不可约平面代数曲线C至多只有有限多个奇点。

证明 选择坐标系使C的仿射方程$f(x,y)=0$满足上面引理的要求。把f视为$\boldsymbol{C}[x][y]$中的元素，考虑其判别式

$$\mathscr{D}(f)=\mathscr{R}(f,f'_y),$$

这里$\mathscr{D}(f)$应是$\boldsymbol{C}[x]$中的元素（为了明确起见，将它记为$\mathscr{D}(f)(x)$）。因为f不可约，应有

$$\mathscr{D}(f)(x)\neq0.$$

记C的奇点集合为S。显然

$$S\cap \mathbf{C}^2\subset\{(x,y)\in \mathbf{C}^2\,|\,f(x,y)=f_y'(x,y)=0\},$$

而后一集合在x轴上的投影为

$$D=\{x\in \mathbf{C}\,|\,\mathscr{D}(f)(x)=0\}.$$

这是一个非零多项式的零点集合，它只应含有有限个点，而对于每一使得$\mathscr{D}(f)(x_0)=0$的点$x_0\in \mathbf{C}$，至多只有有限个y，使得

$$f(x_0,y)=0.$$

这说明$S\cap \mathbf{C}^2$是有限点集。又，不可约代数曲线C与无穷远直线L_∞至多也只能相交于有限个点，$S\cap L_\infty$当然也至多是有限多个点。这样，我们证明了不可约平面代数曲线至多只能有有限多个奇点。▌

下面，我们将证明$C^*=C\backslash S$和C都是连通的。这样，由隐函数定理，C^*(它由C的光滑点组成）是一个一维复流形，也就是说C^*是一个 Riemann 面。一般说来这 Riemann 面是非紧的(除非C本身是光滑的）。

为了证明$C^*=C\backslash S$与C的连通性，我们将利用解析延拓的工具。

我们回忆起，一个**解析函数元**是一个开圆盘$\Delta\subset \mathbf{C}$连同定义于其上的一个解析函数所组成的对(Δ,f)。两个解析函数元(Δ_1,f_1)和(Δ_2,f_2)称为是互为**直接解析延拓**，如果

$$\Delta_1\cap\Delta_2\neq\varnothing,$$

并且在$\Delta_1\cap\Delta_2$上

$$f_1\equiv f_2.$$

一个**解析延拓链**，是一列解析函数元

$$(\Delta_1,f_1),\ (\Delta_2,f_2),\ \cdots,\ (\Delta_N,f_N),$$

其中任意相继的两个解析函数元互为直接解析延拓。设γ是$\mathbf{C}$中一条**连续曲线(道路)**，其始点和终点分别为a和b，(Δ_0,f_0)是满足$a\in\Delta_0$的一个解析函数元，我们说(Δ_0,f_0)可以**沿道路γ解析延拓**，如果存在γ的一个**分拆**

$$\gamma = \bigcup_{j=0}^{N} \gamma_j, \qquad \gamma_j = \widehat{x_j x_{j+1}},$$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = b,$$

及从(Δ_0, f_0)开始的解析延拓链

$$(\Delta_0, f_0), \ (\Delta_1, f_1), \ \cdots, \ (\Delta_N, f_N),$$

使得 $\gamma_j \subset \Delta_j \ (j = 1, 2, \cdots, N)$。

关于解析延拓的一个著名的结果是以下的 Riemann**单值性定理**。

定理2.9 设 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 是单连通开集。如果一个解析函数元(Δ, f) 沿 Ω 中的任意道路都可解析延拓，那么这解析函数元可以扩充为定义于整个 Ω 上的单值解析函数。

这个定理的证明，可以参看复变函数论的教科书，例如 L. Ahlfors 著《复分析》。

现在我们来讨论 $C^* = C \setminus S$ 和 C 的连通性。我们已经知道 C 至多只有有限多个奇点，并且它与无穷远直线 L_∞ 也仅交于有限多个点，因而

$$\overline{C^* \cap \mathbf{C}^2} = C。$$

以下结果是点集拓扑学中的一个熟知的事实：如果集合 A 是连通的，

$$A \subset B \subset \bar{A},$$

那么集合 B 也是连通的，特别地$\bar{A}$是连通的。利用这一结果，要证明 C^* 和C 的连通性，只须证明 $C^* \cap \mathbf{C}^2$ 的连通性就可以了。这是因为

$$C^* \cap \mathbf{C}^2 \subset C^* \subset C = \overline{C^* \cap \mathbf{C}^2}.$$

为避免记号的繁复，在连通性证明过程中，我们把C^*和C 在 $\mathbf{C}^2$ 中的部分 $C^* \cap \mathbf{C}^2$ 和 $C \cap \mathbf{C}^2$ 暂时仍写作 C^* 和 C。

设C 由方程 $f(x, y) = 0$ 给出。我们可以选择坐标系使$f(x, y)$具有引理 2.7 所要求的形式。考虑 f 的判别式 $\mathscr{D}(f)$。我们把

$\mathscr{D}(f)$ 的零点集合记为

$$D = \{x \in \mathbf{C} \mid \mathscr{D}(f)(x) = 0\}.$$

又设

$$\pi: \ C \to \mathbf{C} = \mathbf{C}_x$$

是从 C 到 x 轴的投影。由定理2.8的证明过程，我们知道 $\pi^{-1}(D)$ 是有限点集。对于 $x \in \mathbf{C} \backslash D$，恰有 n 个不同的

$$(x, y_\nu(x)) \in C \backslash \pi^{-1}(D) \quad (\nu = 1, \cdots, n)$$

使得

$$f(x, y_\nu(x)) = 0.$$

又，对于 $C \backslash \pi^{-1}(D)$ 中的点，$f'_y \neq 0$。由隐函数定理，每一 $y_\nu(x)$ 可视为定义于一圆盘上的解析函数元。

用一条简单折线 Λ 连接 D 中的(有限多个)点并通向无穷远，沿这条折线割开复平面 $\mathbf{C}$ 可得到一个单连通区域 Ω（见图2.5）。

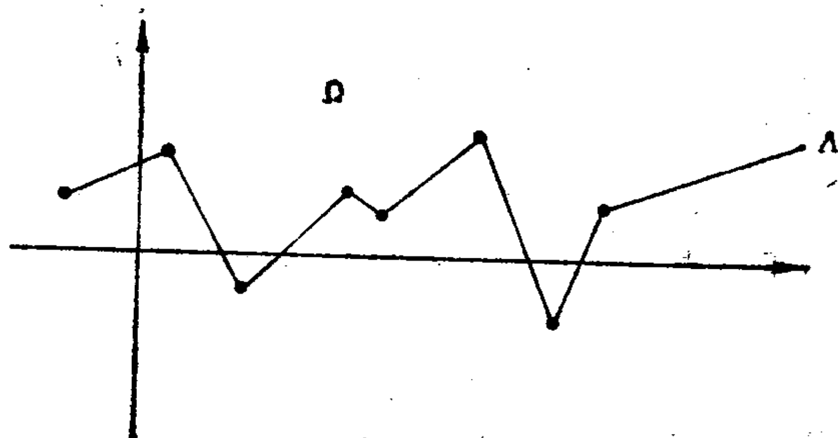


图 2.5

由 Riemann 单值性定理，n 个函数元 $y_\nu(x)$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ 都可延拓为在整个 Ω 上有定义的单值解析函数，我们把延拓后的函数仍记为 $y_\nu(x)$ $(\nu = 1, \cdots, n)$。由解析函数的唯一性定理，延拓后的 $y_\nu(x)$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ 仍应满足

$$f(x, y_\nu(x)) = 0.$$

(这称为函数关系经解析延拓的承袭性，以下我们将多次用到这一原理。)

现在，将 $y_\mu(x)$ $(1\leqslant\mu\leqslant n)$沿着穿过 $A\backslash D$ 的道路 γ 延拓。延拓后的函数 $y_\mu^*(x)$ 仍应满足方程

$$f(x, y_\mu^*(x)) = 0 \quad \text{（承袭性原理！）。}$$

因而仍属于 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 之一。如果原来的

$$y_\mu(x) \neq y_{\mu'}(x),$$

那么延拓后仍有

$$y_\mu^*(x) \neq y_{\mu'}^*(x)$$

（否则沿 $-\gamma$ 延拓就要得到 $y_\mu(x) = y_{\mu'}(x)$）。如果存在 $\mathbf{C}\backslash D$ 中的道路 γ 使得 $y_\mu(x)$和 $y_\nu(x)$可以沿 γ 互相延拓，就写作

$$y_\mu(x) \sim y_\nu(x).$$

容易看出，"$\sim$" 是一个等价关系。按这等价关系把 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$分成等价类

$$E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_l.$$

我们将证明对每一个 E_j，有

$$\prod_{y_\nu(x)\in E_j} (y - y_\nu(x)) \in \mathbf{C}[x, y],$$

并且

$$f(x, y) = \prod_{j=1}^{l} \prod_{y_\nu(x)\in E_j} (y - y_\nu(x)).$$

由此看出，如果 $f(x, y)$不可约，就只能有 $l = 1$，即 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$全属于同一等价类，它们都能沿 $\mathbf{C}\backslash D$ 中的道路互相延拓。这就是说，$C\backslash\pi^{-1}(D)$ 上的任意两点

$$(x_0, y_\mu(x_0)) \quad \text{和} \quad (x_1, y_\nu(x_1))$$

可以用道路连接。这就证明了 $C\backslash\pi^{-1}(D)$是连通的。

这样，C^*和 C 的连通性的证明，归结为以下的引理。

引理2.10 （记号同上所述）对于 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$按等价关系 "$\sim$" 的任一等价类 E，我们有

$$\prod_{y_\nu(x)\in E}(y-y_\nu(x))\in \mathbf{C}[x,y].$$

证明 不妨设 $E=\{y_1(x),\cdots,y_m(x)\}$。于是

$$\prod_{y_\nu(x)\in E}(y-y_\nu(x))=\prod_{\lambda=1}^{m}(y-y_\lambda(x))$$

$$=y^m+b_1(x)y^{m-1}+\cdots+b_m(x),$$

这里

$$b_1(x)=-\sum_{\lambda=1}^{m}y_\lambda(x),$$

$$b_2(x)=\sum_{1\leqslant\lambda<\mu\leqslant m}y_\lambda(x)y_\mu(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_m(x)=(-1)^m y_1(x)\cdots y_m(x).$$

因为沿 $\mathbf{C}\backslash D$ 中任意道路延拓，只在 E 中产生一个置换，因而 $b_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$ 是定义于 $\mathbf{C}\backslash D$ 的单值解析函数。

由代数学中熟知的结果，如果多项式

$$y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_n$$

的系数满足

$$|a_j|\leqslant M\quad(j=1,\cdots,n),$$

那么这多项式的各个根应满足

$$|y_\nu|\leqslant 1+M\quad(\nu=1,\cdots,n).$$

据此，我们看到上面定义的诸 $b_\lambda(x)$ $(\lambda=1,\cdots,m)$ 在 D 中各点邻近都是有界的。于是 $b_\lambda(x)$ $(\lambda=1,\cdots,m)$ 都可以扩充为在整个 $\mathbf{C}$ 上全纯的函数，扩充后的函数仍记为 $b_\lambda(x)$ $(\lambda=1,\cdots,m)$。

现在我们来证明 $b_\lambda(x)$ $(\lambda=1,\cdots,m)$ 实际上都是多项式。为此考虑它们在无穷远点邻近的状况。只要能说明无穷远点是 $b_\lambda(x)$ $(\lambda=1,\cdots,m)$ 的极点就行了。

对原来的多项式

$$f(x,y)=y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_n(x)$$

作变元替换

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{x'}, \\ y=\dfrac{y'}{x'}, \end{cases}$$

我们得到

$$x'^n f\left(\frac{1}{x'}, \frac{y'}{x'}\right)=y'^n+\left(x'a_1\left(\frac{1}{x'}\right)\right)y'^{(n-1)}+\cdots$$

$$+x'^n a_n\left(\frac{1}{x'}\right).$$

按我们前面所作的假设，$f(x,y)$满足引理2.7的要求，因而

$$\deg a_\nu\leqslant\nu \quad 或者 \quad a_\nu=0 \quad (\nu=1,\cdots,n).$$

于是

$$x'^\nu a_\nu\left(\frac{1}{x'}\right)\in \mathbf{C}[x'].$$

所以

$$y'^n+\left(x'a_1\left(\frac{1}{x'}\right)\right)y'^{(n-1)}+\cdots+x'^n a_n\left(\frac{1}{x'}\right)\in \mathbf{C}[x',y'].$$

这多项式的各个根在

$$\left\{x' \,\middle|\, \frac{1}{x'}\in\Omega=\mathbf{C}\setminus A\right\}$$

中给出的n个解析分支应为

$$y'_\nu(x')=x'y_\nu\left(\frac{1}{x'}\right) \quad (\nu=1,\cdots,n),$$

其中m个分支$y'_1(x'),\cdots,y'_m(x')$沿着不经过

$$\left\{x' \,\middle|\, x'=0 \text{ 或者 } \frac{1}{x'}\in D\right\}$$

的道路延拓也只引起相互之间的置换。考察

$$x'b_1\left(\frac{1}{x'}\right)=-x'\sum_{\lambda=1}^{m}y_\lambda\left(\frac{1}{x'}\right)=-\sum_{\lambda=1}^{m}y'_\lambda(x'),$$

$$x'^2b_2\left(\frac{1}{x'}\right)=x'^2\sum_{1\leqslant\lambda<\mu\leqslant n}y_\lambda\left(\frac{1}{x'}\right)y_\mu\left(\frac{1}{x'}\right)$$

$$=\sum_{1\leqslant\lambda<\mu\leqslant n}y'_\lambda(x')y'_\mu(x'),$$

………………………………………………

$$x'^mb_m\left(\frac{1}{x'}\right)=(-1)^mx'^my_1\left(\frac{1}{x'}\right)\cdots y_m\left(\frac{1}{x'}\right)$$

$$=(-1)^my'_1(x')\cdots y'_m(x'),$$

它们都是在$x'=0$邻近解析的函数，并且在$x'=0$邻近是有界的。这说明$b_\lambda(1/x')$在$x'=0$有不超过λ阶的极点，因而$b_\lambda(x)$是不超过λ次的多项式。▌

由上面所作的全部讨论，我们实际上已证明了$C\backslash\pi^{-1}(D)$是连通的，而$C^*=C\backslash S$和C的连通性则是其直接推论，因为我们有

$$C\backslash\pi^{-1}(D)\subset C^*\subset C=\overline{C\backslash\pi^{-1}(D)}.$$

到此，我们完全证明了以下重要结果。

定理2.11 设C是不可约平面代数曲线，则C和它的光滑点集合C^*都是$P^2\boldsymbol{C}$中的连通集。

推论2.12 C^*是一个Riemann面(不一定紧致)。

§3 正则化的概念

我们曾谈到，所谓正则化(Normalization)，就是给不可约代数曲线以某种形式的全纯参数表示。这就是说，对于不可约代数曲线

$$C\subset P^2\boldsymbol{C},$$

我们寻求一个紧 Riemann 面 $\tilde{C}$ 和一个全纯映射

$$\sigma:\ \tilde{C}\to P^2\mathbf{C},$$

使得

$$\sigma(\tilde{C})=C.$$

定义3.1 设C是不可约平面代数曲线，S是它的奇点的集合。如果存在紧 Riemann 面 $\tilde{C}$ 及全纯映射

$$\sigma:\ \tilde{C}\to P^2\mathbf{C},$$

使得

a) $\sigma(\tilde{C})=C$；

b) $\sigma^{-1}(S)$是有限点集；

c) $\sigma:\ \tilde{C}\backslash\sigma^{-1}(S)\to C\backslash S$ 是一对一的，则称 $(\tilde{C},\sigma)$ 为C 的**正则化**。在不致于混淆的情形，也就简单地说 $\tilde{C}$ 是C的正则化。

代数曲线在奇点处的奇异性，表现为在这点具有不止一条切线(重切线重复计数)，或者说有若干条具有不同切线的曲线支(具体定义在下面 § 5 中给出)在这点相交。正则化的作法，正是设法在奇点处把具有不同切线的曲线支分离开，从而消除这种奇异性。因而正则化又称为**奇性的消去**(desingularization)。

引理3.2 设 $\tilde{C},\tilde{C}'$是 Riemann 面，

$$h:\ \tilde{C}\to\tilde{C}'$$

是单一、满全纯映射，则 h 是双全纯映射。

证明 只须证明在每一点 $p\in\tilde{C}$ 邻近 h 都是局部双全纯的即可。由第一章习题3.3，我们知道 h 可以局部地表示为

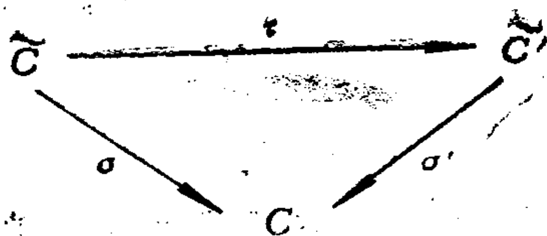
$$w=z^{\mu},$$

这里μ是正整数。因为 h 是单一的，只能有$\mu=1$，因而 h 在每一点邻近都是局部双全纯的。 ∎

定理3.3 代数曲线C的正则化在同构的意义下是唯一的。即如果 $(\tilde{C},\sigma)$ 和 $(\tilde{C}',\sigma')$ 都是C的正则化，则存在同构（双全纯映射）

$$\tau:\ \tilde{C}\to\tilde{C}'$$

使得下面图表可交换：

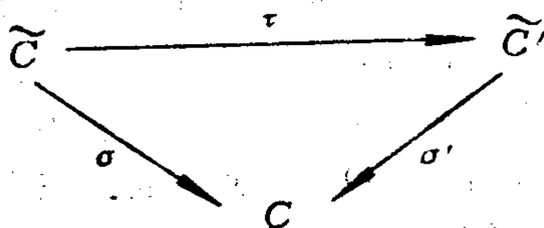


其中 $\sigma=\sigma'\circ\tau$。

证明 记C的奇点集合为S，考虑双全纯映射

$$\tilde{C}\backslash\sigma^{-1}(S)\xrightarrow{\sigma}C\backslash S\xrightarrow{(\sigma')^{-1}}\tilde{C}'\backslash(\sigma')^{-1}(S).$$

这复合映射可以连续扩充到整个$\tilde{C}$上，扩充后的映射是从$\tilde{C}$到$\tilde{C}'$的双全纯映射，记这双全纯映射为τ.则它使得以下图表可交换：



其中 $\sigma=\sigma'\circ\tau$。▮

本章的主要目的，是证明正则化的存在性。通过正则化的讨论我们将看到，每一代数曲线的拓扑图形，都是由一定的可定向紧曲面在有限个点处捏合而成。在每一光滑点邻近，代数曲线的局部拓扑图形，相当于以这点为中心的一个开圆盘；而在每一奇点邻近，代数曲线的局部拓扑图形相当于以奇点为中心的若干开圆盘在这点捏合。

为了弄清楚代数曲线的局部构造，我们将借助于对 Weierstrass 多项式的讨论。

§4 Weierstrass 多项式

以$\boldsymbol{C}\{x\}$($\boldsymbol{C}\{x,y\}$)表示在$0\in\boldsymbol{C}$($(0,0)\in\boldsymbol{C}^2$)邻近全纯的函数所组成的环，即

$$\mathbf{C}\{x\}=\left\{\text{收敛幂级数 } f=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right\}$$

$$\left(\mathbf{C}\{x,y\}=\left\{\text{收敛幂级数 } f=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}x^m y^n\right\}\right),$$

其中各幂级数的收敛半径可以不同。以下记

$$\mathscr{O}=\mathbf{C}\{x,y\}.$$

定义4.1 $w\in\mathscr{O}$称为是关于y的 Weierstrass 多项式，如果

$$w=y^d+a_1(x)y^{d-1}+\cdots+a_d(x),$$

$$a_j(x)\in\mathbf{C}\{x\},\ \text{并且}\ a_j(0)=0\qquad(j=1,\cdots,d).$$

下面将证明的Weierstrass预备定理指出，在一定条件下，每一$f\in\mathscr{O}$都可唯一地写成$f=u\cdot w$的形式。这里u是$\mathscr{O}$中的**单位**(unit)，即$1/u\in\mathscr{O}$，或者等价地$u(0,0)\neq 0$，而w是一个 Weierstrass 多项式。

设$f\in\mathscr{O}$并且$f(0,y)$不恒等于0，我们可以写

$$f(0,y)=by^d+b_1y^{d+1}+\cdots,$$

这里$b\neq 0$，$d\geqslant 1$。由于$f(0,y)$的零点是孤立的，可设在$|y|\leqslant\varepsilon$范围内$f(0,y)$除了$y=0$以外没有其他的零点，因而，可以假定在圆周$|y|=\varepsilon$之上

$$|f(0,y)|\geqslant c>0.$$

只要$\rho>0$充分小，对于$|x|<\rho$，$|y|=\varepsilon$就有

$$|f(x,y)|\geqslant\frac{c}{2}>0.$$

引理4.2 在如上所述的条件下，对任意的$|x|<\rho$，$f(x,y)$作为y的函数在$|y|<\varepsilon$中有同样个数的零点（零点个数$=d$）。

证明 根据幅角原理，对于固定的x，只要$|x|<\rho$，$f(x,y)$作为y的函数在$|y|<\varepsilon$中的零点个数为

$$n(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|y|=\varepsilon}\frac{f_y'(x,y)}{f(x,y)}\mathrm{d}y.$$

由这表达式，$n(x)$作为x的函数是连续的，但$n(x)$只取整数值，

因而$n(x)$是一个常数。又，显然有$n(0)=d$，所以

$$n(x)=d. \quad \blacksquare$$

对固定的x ($|x|<\rho$)，设$y_\nu(x)(\nu=1,\cdots,d)$ 是

$$f(x,y)=0$$

的d个零点，我们构造一个多项式

$$w(x,y)=\prod_{\nu=1}^{d}(y-y_\nu(x))$$

$$=y^d+a_1(x)y^{d-1}+\cdots+a_d(x).$$

这里

$$a_1(x)=-\sum_{\mu=1}^{d}y_\mu(x),$$

$$a_2(x)=\sum_{1\leqslant\mu<\nu\leqslant d}y_\mu(x)y_\nu(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_d(x)=(-1)^d y_1(x)\cdots y_d(x)$$

都是由$y_\nu(x)(\nu=1,\cdots,d)$ 的初等对称多项式表示。

引理4.3 上面构造的$w(x,y)$ 是一个 Weierstrass 多项式。

证明 只须验证$a_j(x)(j=1,\cdots,d)$是全纯的。我们知道，每一初等对称多项式都可以表示成Newton对称多项式的多项式，

$$a_1(x)=-\sigma_1(x),$$

$$a_2(x)=\frac{1}{2}[(\sigma_1(x))^2-\sigma_2(x)],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这里

$$\sigma_1(x)=\sum_\mu y_\mu(x),$$

$$\sigma_2(x)=\sum_\mu(y_\mu(x))^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_d(x)=\sum_{\mu}(y_\mu(x))^d$$

是 $y_\mu(x)$ ($\mu=1,\cdots,d$) 的 Newton 对称多项式。因此，只须验证 $\sigma_k(x)$ ($k=1,\cdots,d$) 是 x 的全纯函数。这由以下表示式立即可看出

$$\sigma_k(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|y|=\varepsilon}y^k\frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)}\mathrm{d}y. \quad \blacksquare$$

引理4.4 （记号约定同上）

$$u(x,y)=\frac{f(x,y)}{w(x,y)}$$

可以扩充为在区域 $|x|<\rho$，$|y|<\varepsilon$ 内的全纯函数，并且

$$u(0,0)\neq 0.$$

证明 容易看出

$$u(x,y)=\frac{f(x,y)}{w(x,y)}$$

在 $|x|<\rho$，$|y|\leqslant\varepsilon$，$w(x,y)\neq0$ 处是全纯的。对于固定的 x ($|x|<\rho$)，$w(x,y)$ 与 $f(x,y)$ 有相同的零点，因而 $u(x,y)$ 在 $|y|<\varepsilon$ 全纯。对于固定的 y ($|y|<\varepsilon$)，由表达式

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\eta|=\varepsilon}\frac{u(x,\eta)}{\eta-y}\mathrm{d}\eta,$$

我们看出 $u(x,y)$ 在 $|x|<\rho$ 是全纯的。由 Osgood 引理(第一章引理 9.4)，对各变元分别为全纯的函数 $u(x,y)$，在 $|x|<\rho$, $|y|<\varepsilon$ 是二元全纯函数。 ▌

至此，我们实际上已经证明了著名的Weierstrass预备定理的存在性部分。

定理4.5 （**Weierstrass预备定理**） 如果 $f\in\mathscr{O}$ 并且 $f(0,y)$ 不恒等于 0，那么在 $(0,0)$ 的适当邻域内，f 可唯一地表示为

$$f(x,y)=u(x,y)w(x,y), \tag{4.1}$$

这里$w(x,y)$是一个 Weierstrass 多项式，$u(x,y)$是$\mathscr{O}$的一个单位（即$\mathscr{O}$中可逆元素，这意味着

$$\frac{1}{u(x,y)}\in\mathscr{O}$$

或者等价地$u(0,0)\neq 0$）。

证明 存在性部分已在上面给出证明，现在证明唯一性部分。因为在（0,0）邻近

$$u(x,y)\neq 0,$$

在表示式(4.1)之中，对于固定的x，$w(x,y)$与$f(x,y)$应有相同的零点。将$w(x,y)$分解因式应有

$$w(x,y)=\prod_{\lambda=1}^{d}(y-y_{\lambda}(x)),$$

这里$y_{\lambda}(x)(\lambda=1,\cdots,d)$对固定的$x$是函数$f(x,y)$的零点。于是

$$w(x,y)=y^{d}+a_{1}(x)y^{d-1}+\cdots+a_{d}(x)$$

是唯一确定的，它的各个系数为

$$a_{1}(x)=-\sum_{\lambda=1}^{d}y_{\lambda}(x),$$

$$a_{2}(x)=\sum_{1\leqslant\lambda<\mu\leqslant d}y_{\lambda}(x)y_{\mu}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{d}(x)=(-1)^{d}y_{1}(x)\cdots y_{d}(x).$$

而

$$u(x,y)=\frac{f(x,y)}{w(x,y)}$$

也是唯一确定的。▌

推论4.6 $\mathscr{O}$是唯一分解整环（U.F.D）。

这就是说，任意$f\in\mathscr{O}$可以表示为

$$f=f_{1}\cdot f_{2}\cdot\cdots\cdot f_{L},\tag{4.2}$$

这里$f_j(j=1,2,\cdots,L)$在$\mathscr{O}$中不可约，并且这些因式除了可以乘以$\mathscr{O}$中的单位及排列次序外是唯一确定的。

如果把重复的因式写在一起，上面的分解式(4.2)可以写成

$$f=f_1^{m_1}\cdot\cdots\cdot f_l^{m_l}, \tag{4.2$'$}$$

其中的不可约因式$f_1,f_2,\cdots,f_l$各不相同。

推论4.6的证明

第一步 证明$\boldsymbol{C}\{x\}$是唯一分解整环(U.F.D.)。这是初等的，因为任意的$f\in\boldsymbol{C}\{x\}$可以唯一地写成

$$f(x)=x^{\mu}h(x),\qquad h(0)\neq 0$$

(因而$h(x)$是$\boldsymbol{C}\{x\}$中的单位)。

第二步 证明$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$是U.F.D.。这由第一步的结果及代数中的Gauss引理立即得到。

第三步 如果$f(0,y)\equiv 0$，那么f可唯一地表示为

$$f(x,y)=x^{\nu}f_1(x,y),\quad f_1(0,y)\not\equiv 0.$$

所以，不失一般性，我们可以假设$f(0,y)\not\equiv 0$。

第四步 设$f(0,y)\not\equiv 0$，由Weierstrass预备定理，f可以唯一地表示为

$$f(x,y)=u(x,y)w(x,y), \tag{4.3}$$

这里u是$\mathscr{O}$中的单位而w是一个Weierstrass多项式。利用第二步的结果，我们得到w在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中的唯一分解式

$$w=h_1\cdot\cdots\cdot h_L,$$

这里h_j在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中不可约。因为

$$w(0,y)=y^n\not\equiv 0,$$

所以

$$h_j(0,y)\not\equiv 0.$$

根据Weierstrass预备定理

$$h_j=u_jw_j,$$

这里u_j是$\mathscr{O}$中单位，w_j是Weierstrass多项式。因为h_j在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中不可约，w_j在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中也不可约$(j=1,\cdots,L)$。我们有

$$w=(u_1\cdots u_L)(w_1\cdots w_L),$$

$(u_1\cdots u_L)$仍是$\mathscr{O}$中单位，$(w_1\cdots w_L)$仍是 Weierstrass 多项式。由Weierstrass预备定理的唯一性论断，我们得到

$$u_1\cdot\cdots\cdot u_L=1,\qquad w=w_1\cdot\cdots\cdot w_L。$$

这样w就分解成为不可约 Weierstrass 多项式 $w_1,\cdots,w_L$ 的乘积($w_1,\cdots,w_L$ 在 $\boldsymbol{C}\{x\}[y]$ 中不可约)。下面，我们来证明 $w_j(j=1,\cdots,L)$ 在 $\boldsymbol{C}\{x,y\}$ 中也不可约。设

$$w_j=v'v'',$$

v'和v''都是$\boldsymbol{C}\{x,y\}$中非平凡因式。因为

$$w_j(0,y)\not\equiv 0,$$

显然有

$$v'(0,y)\not\equiv 0,\qquad v''(0,y)\not\equiv 0。$$

由Weierstrass预备定理，又有

$$v'=u'w',\qquad v''=u''w'',$$

这里u',u''是$\mathscr{O}=\boldsymbol{C}\{x,y\}$中的单位，$w',w''$是 Weierstrass 多项式。这样，我们得到

$$w_j=(u'u'')\cdot(w'w'')。$$

利用Weierstrass预备定理的唯一性部分立即得到

$$u'u''\equiv 1。$$

于是

$$w_j\equiv w'w'',$$

这与w_j在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中的不可约性矛盾。由此，我们证明了各w_j在$\boldsymbol{C}\{x,y\}$中不可约，而f则具有分解式

$$f=(uw_1)w_2\cdot\cdots\cdot w_L。\tag{4.4}$$

第五步 证明上述分解式除了因式的相伴关系(即f_j可以换成ηf_j，η是$\mathscr{O}$中适当的单位)及因式的排列顺序外是唯一确定的。设f还有分解式

$$f=f_1\cdot\cdots\cdot f_{L'},\tag{4.5}$$

由Weierstrass预备定理

$$f_j = u'_j w'_j \quad (j = 1, 2, \cdots, L'),$$

u'_j是$\mathscr{O}$中单位，w'_j是 Weierstrass 多项式($j = 1, \cdots, L'$)。于是

$$f = u'w', \tag{4.6}$$

这里$u' = u'_1 \cdots u'_{L'}$是$\mathscr{O}$中的单位；而$w' = w'_1 \cdots w'_{L'}$是 Weierstrass 多项式。比较(4.3)和(4.6)，由Weierstrass预备定理的唯一性论断，我们得到

$$u' = u, \qquad w' = w.$$

又由第二步的结果，$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$是唯一分解整环，我们得知

$$L' = L,$$

并且必要时改变因式的次序，可设

$$w'_j = w_j \quad (j = 1, \cdots, L).$$

这说明f的分解式(4.5)与(4.4)是一致的。 ∎

注记4.7 在推论4.6的证明过程的第四步中，我们实际上已证明了在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中的不可约性与在$\boldsymbol{C}\{x,y\}$中的不可约性是一致的。这一注记将在以后的讨论中多次用到。

这样，对于代数多项式$f \in \boldsymbol{C}[x,y]$，我们可以考虑它在$\boldsymbol{C}[x,y]$中的不可约性，亦可考虑它在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中的不可约性(后者等价于在$\boldsymbol{C}\{x,y\}$中的不可约性)。下面的习题指出，在$\boldsymbol{C}[x,y]$中的不可约性与在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中的不可约性是不同的。

习题4.1 考察多项式$f(x,y) = x^3 - x^2 + y^2$。

a) 试证f在$\boldsymbol{C}[x,y]$中不可约；

b) 试证f在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中可约。

习题4.2 试证 $g(x,y) = x^3 - y^2$ 在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中不可约。

提示 利用以下事实：为使

$$f(x,y) = u(x,y)\prod_{\lambda}(y - y_\lambda(x))$$

在$\boldsymbol{C}\{x\}[y]$中不可约，必须而且只须绕$x = 0$作解析延拓可以将任意的$y_\mu(x)$变到任意的$y_\nu(x)$。这一事实将在下一节中进一步讨论。

§ 5 平面代数曲线的局部构造

为考察平面代数曲线 C 在一点 $p\in C$ 邻近的状况，我们选择坐标系使 $p=(0,0)$ 并使 C 的仿射方程满足引理2.7的要求。为便于以后引用，我们把它陈述为：

引理5.1 设 C 是平面代数曲线，$p\in C$。我们可选择坐标系使

$$p=(0,0)\in \mathbf{C}^2\subset P^2\mathbf{C},$$

并使 C 的仿射方程 $f(x,y)=0$ 满足

$$f(x,y)=y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_n(x),$$

$$a_j(x)\in \mathbf{C}[x],\quad \deg a_j(x)\leqslant j \text{ 或者 } a_j(x)\equiv 0.$$

证明 经适当移轴可使 $p=(0,0)$。以下证明同引理2.7. ▌

对于平面代数曲线 $C\subset P^2\mathbf{C}$，选择坐标系满足上面引理的要求，于是 C 的仿射方程为

$$f(x,y)=y^n+a_1(x)y^{n-1}+\cdots+a_n(x).$$

如果 C 是不可约曲线，那么 f 在 $\mathbf{C}[x][y]$ 中不可约。现在限制在 $p=(0,0)$ 邻近，把 f 视为 $\mathbf{C}\{x\}[y]$ 中的元素，它仍有可能在 $\mathbf{C}\{x\}[y]$ 中分解为不可约因式的乘积：

$$f=f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_l.$$

不论是在 $\mathbf{C}[x][y]$ 中，或者是在 $\mathbf{C}\{x\}[y]$ 中，判别式 $\mathscr{D}(f)$ 都是一样的。f 在 $\mathbf{C}[x][y]$ 中不可约，

$$\mathscr{D}(f)\neq 0,$$

所以 f 在 $\mathbf{C}\{x\}[y]$ 中的分解式也不会出现重因式。

定义5.2 a) 设 $f\in\mathscr{O}$，$f(0,0)=0$，则称

$$V=\{(x,y)\in\mathbf{C}^2 \mid |x|<\rho,\ |y|<\varepsilon,\ f(x,y)=0\}$$

为 $p=(0,0)$ 邻近的**局部解析曲线**。如果 f 在 $\mathscr{O}=\mathbf{C}\{x,y\}$ 中不可约，则称 V 为**不可约局部解析曲线**。

b) 设 f 在 $\mathscr{O}$ 中有分解式

$$f=f_1^{m_1}\cdot\cdots\cdot f_l^{m_l},$$

其中f_j在$\mathscr{O}=\boldsymbol{C}\{x,y\}$中不可约。则可记

$$V=m_1V_1+\cdots+m_lV_l,$$

这里

$$V_j=\{(x,y)\in\boldsymbol{C}^2 \mid |x|<\rho,|y|<\varepsilon,\ f_j(x,y)=0\}$$
$$(j=1,\cdots,l)$$

称为是 V 的**不可约局部解析曲线支**。

这样，一个不可约平面代数曲线，可以局部地分解为过同一点的一些不可约解析曲线支：

$$f=f_1\cdot\cdots\cdot f_l,\qquad V=V_1+\cdots+V_l.$$

我们将证明，每一不可约局部解析曲线支，其拓扑图形都相当于一个圆盘。这样，我们看到，代数曲线在一点邻近的局部拓扑图形，是一些圆盘在圆心处粘合在一起的圆形。如果在该点只有一个不可约局部解析曲线支，代数曲线在这点邻近的局部拓扑图形，就简单地是一个圆盘。

定理5.3 对于如上所述的每一不可约局部解析曲线

$$V_j=\{(x,y)\in\boldsymbol{C}^2 \mid |x|<\rho,\ |y|<\varepsilon,\ f_j(x,y)=0\},$$

存在圆盘

$$\Delta=\{t\in\boldsymbol{C} \mid |t|<\delta\}$$

和全纯映射

$$g_j:\Delta\to\boldsymbol{C}^2,$$

这映射一对一地把 Δ映成 V_j。

注记5.4 由于

$$f(0,y)=y^n,\quad f=f_1\cdot\cdots\cdot f_l,$$

各 f_j 应满足$f_j(0,y)\not\equiv 0$。由 Weierstrass 预备定理可设

$$f_j=u_jw_j,$$

其中 u_j 是$\mathscr{O}$中单位，w_j是 Weierstrass多项式。V_j可以认为是由$w_j=0$给出的：

$$V_j=\{(x,y)\in\boldsymbol{C}^2 \mid |x|<\rho,|y|<\varepsilon,\ w_j(x,y)=0\}.$$

以下认为 f_j本身就是 Weierstrass 多项式。

为证明定理 5.3，需要作一些准备。

引理5.5 设 f 是一不可约 Weierstrass 多项式

$$f(x,y)=y^k+a_1(x)y^{k-1}+\cdots+a_k(x)。$$

则存在圆盘

$$D=\{x\in \boldsymbol{C} \mid |x|<\rho\},$$

使得对 D 中固定的 $x\neq 0$，$f(x,y)$ 视为 y 的多项式只有单根。

证明 因为 f 是不可约 Weierstrass 多项式.

$$\mathscr{D}(f)(x)\neq 0。$$

于是 $\mathscr{D}(f)(x)$ 只能有孤立的零点。又因为 $f(0,y)=y^k$ 具有重根，所以 $\mathscr{D}(f)(0)=0$。O 是 $\mathscr{D}(f)$ 的一个孤立零点，因而存在圆盘

$$D=\{x\in \boldsymbol{C} \mid |x|<\rho\},$$

使得对于 D 中之 $x\neq 0$ 都有 $\mathscr{D}(f)(x)\neq 0$。于是对这些 x，f 视为 y 的多项式只有单根。▎

这样的 Weierstrass 多项式可以写成

$$f(x,y)=y^k+a_1(x)y^{k-1}+\cdots+a_k(x)$$
$$=\prod_{\nu=1}^{k}(y-y_\nu(x)),$$

这里 $y_\nu(x)(\nu=1,\cdots,k)$ 是 $f(x,y)$ 的根。对于圆盘 D 中之 $x\neq 0$，$\mathscr{D}(f)(x)\neq 0$。对这样的 x 自然有

$$f'_y(x,y)\neq 0。$$

由隐函数定理，每一 $y_\nu(x)$ 是局部全纯函数。沿一射线方向(例如沿正实轴方向)割开圆盘 D，在带割缝的圆盘中解析地延拓 $y_\nu(x)$ $(\nu=1,\cdots,k)$，由 Riemann 单值化定理，我们得到 k 个单值解析分支 $y_\nu(x)(\nu=1,\cdots,k)$，每一分支都满足

$$f(x,y_\nu(x))=0。$$

现在经过割缝绕 $x=0$ 作 $y_\nu(x)$ 的解析延拓。延拓后得到的 $y^*_\nu(x)$ 仍应满足

$$f(x,y^*_\nu(x))=0 \quad (承袭性原理),$$

因而 $y^*_\nu(x)$ 是 $y_1(x),\cdots,y_k(x)$ 中之一。又，$y_\nu(x)$ 与 $y^*_\nu(x)$ 的对应是一对一的。这样通过绕 $x=0$ 的解析延拓，$y_1(x),\cdots,y_k(x)$

经历了一个置换 τ。

引理5.6 为使Weierstrass 多项式 f 是不可约的，必须并且只须上述置换 τ 是可迁的，即通过绕 $x=0$ 的延拓，我们可以由任何一个 $y_\mu(x)$ 达到另外任何一个 $y_\nu(x)(\mu,\nu=1,\cdots,k)$。

证明 设置换 τ 分解为彼此独立的循环置换

$$(y_{11}(x),\cdots,y_{1s_1}(x)),\ \cdots,\ (y_{l1}(x),\ \cdots,\ y_{ls_l}(x)).$$

每一循环置换产生一个多项式

$$f_i=\prod_{j=1}^{s_i}(y-y_{ij}(x))$$

$$=y^{s_i}+b_1(x)y^{s_i-1}+\cdots+b_{s_i}(x),$$

这里

$$b_1(x)=-\sum_{\lambda=1}^{s_i}y_{i\lambda}(x),$$

$$b_2(x)=\sum_{1<\lambda<\mu<s_i}y_{i\lambda}(x)y_{i\mu}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_{s_i}(x)=(-1)^{s_i}y_{i1}(x)\cdots y_{is_i}(x).$$

这些系数在置换τ下不变，因而在除去原点的圆盘$D\backslash\{O\}$中全纯。又因为 $b_j(x)(j=1,\cdots,s_i)$在原点 O 邻近是有界的，所以它们实际上在整个 D 上是全纯的。这样我们得到

$$f_i\in\mathbf{C}\{x\}[y](i=1,\cdots,l).$$

但是

$$f=f_1\cdot f_2\cdot\cdots\cdot f_l.$$

于是，要使 f 是不可约的，必须并且只须 $l=1$，$s_1=k$，即置换 τ 是可迁的。▎

我们把定理 5.3 更具体地写成：

定理5.7（局部正则化） 在引理5.5的假设条件之下，在圆盘

$$\Delta=\{t\in\mathbf{C}\mid|t|<\rho^{1/k}\}$$

之中定义映射

$$g:\ \Delta\to \boldsymbol{C}^2,$$
$$t\mapsto (t^k, y_\nu(t^k)),$$

则有

a) g 是在Δ中有确切定义的全纯映射；

b) 映射 g 把Δ一对一地映成局部解析曲线

$$V=\{(x,y)\in \boldsymbol{C}^2 \mid |x|<\rho, |y|<\varepsilon,\ f(x,y)=0\},$$

并且 g 是从 $\Delta\backslash\{O\}$到 $V\backslash\{(0,0)\}$的双全纯映射 ($V\backslash\{(0,0)\}$ 视为 Riemann 面)。

证明 a) 当 t 绕原点 $O\in\Delta$一周时，t^k 环绕原点 O 整整 k 周。由此得知，当 t 环绕原点 O 一周时，$y_\nu(t^k)$ 的值不改变。这样$y_\nu(t^k)$定义了一个定义于 $0<|t|<\rho^{1/k}$的单值解析函数。又因因 $y_\nu(t^k)$在原点 O 邻近是有界的，因而 $y_\nu(t^k)$在整个圆盘Δ上解析。由此易见

$$g:\ \Delta\to \boldsymbol{C}^2,$$
$$t\mapsto (t^k, y_\nu(t^k))$$

是Δ上的全纯映射。

b) 如果

$$g(t')=(t'^k, y_\nu(t'^k))=(t^k, y_\nu(t^k))=g(t),$$

那么

$$t'=\left(\exp\frac{2\pi i\, l}{k}\right)t,$$

并且

$$y_\nu((\exp(2\pi i\, l))t^k)=y_\nu(t^k),$$

这里$(\exp(2\pi i\, l))t^k$ 表示 t^k 绕原点 l 周。由上面所述，仅当自变元 x 绕原点 km 周时，$y_\nu(x)$的值不变，因而我们有

$$l=km \quad (m\in \boldsymbol{Z}).$$

这时

$$t'=\left(\exp\frac{2\pi i\, l}{k}\right)t=(\exp(2\pi i\, m))t=t.$$

这就证明了 g 的单一性。而且当 t 在Δ 中变动时，$y_\nu(t^k)$ 可以取 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_k(x)$的一切可能的值($|x|<\rho$)，因而 g 把Δ 映满 V。

由隐函数定理，$V\backslash\{(0,0)\}$ 可以视为以 x 为局部全纯坐标的 Riemann 面。映射

$$g:\ \Delta\backslash\{0\}\to V\backslash\{(0,0)\}$$

是全纯的，因为它的局部表示为

$$x=t^k.$$

这样，由引理 3.2，从 $\Delta\backslash\{O\}$到 $V\backslash\{(0,0)\}$ 的单、满、全纯映射 g 是双全纯映射。▌

§6 正则化定理证明的完成

我们已经看到，对于不可约代数曲线 C，它的光滑点集合 C^*是一个(不一定紧致的)Riemann 面。但由于通过每一奇点可以有若干不可约局部解析曲线支，$C=C^*\cup S$ 可能不是 Riemann 面。正则化的手续，则是在每一奇点处把不同的曲线支分开来，构成一个紧 Riemann 面$\tilde{C}$。

为了叙述方便，我们先考虑只有一个奇点 q 的情形。设通过这点有 m 个不可约局部解析曲线支 。按上一节中的做法，我们可以有 m 个开圆盘Δ_j $(j=1,\cdots,m)$和 m 个局部正则化映射 g_j $(j=1,\cdots, m)$。因为

$$g_j:\ \Delta_j\backslash\{O\}\to C^*$$

是到象集的双全纯映射，我们可以作

$$\tilde{C}=C^*\bigcup_{g_1}\Delta_1\bigcup_{g_2}\Delta_2\cdots\bigcup_{g_m}\Delta_m.$$

这里$C^*\bigcup_{g_1}\Delta_1$定义如下：考虑集合

$$C^* \cup \Delta_1 \quad (\text{不相交的并}),$$

在这集合上由关系

$$p \sim g_1(p)$$

生成一个等价关系(仍记为"$\sim$")。$C^* \cup \Delta_1$(不相交的并)对于等价关系"$\sim$"的商空间记为 $C^* \bigcup_{g_1} \Delta_1$，即

$$C^* \bigcup_{g_1} \Delta_1 = C^* \bigcup \Delta_1 \Big/ \sim .$$

由于 g_1: $\Delta_1 \backslash \{O\} \to C^*$ 是到象集的双全纯映射，我们容易看出，$C^* \bigcup_{g_1} \Delta_1$可以赋予局部全纯坐标而作成一个 Riemann 面。这样逐次作下去就得到

$$\bar{C} = C^* \bigcup_{g_1} \Delta_1 \bigcup_{g_1} \Delta_2 \cdots \bigcup_{g_m} \Delta_m .$$

如果奇点集合 S 包含了不止一个点

$$S = \{q_1, \cdots, q_l\},$$

则有必要考虑在每一奇点处的不可约局部解析曲线支和相应的局部正则化：

在 q_1点处

$$g_{11}: \ \Delta_{11} \backslash \{O\} \to C^*,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_{1m_1}: \ \Delta_{1m_1} \backslash \{O\} \to C^*;$$

在 q_2点处

$$g_{21}: \ \Delta_{21} \backslash \{O\} \to C^*,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_{2m_2}: \ \Delta_{2m_2} \backslash \{O\} \to C^*;$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

在 q_l 点处

$$g_{l1}:\ \Delta_{l1}\backslash\{O\}\to C^*,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{lm_l}:\ \Delta_{lm_l}\backslash\{O\}\to C^*.$$

然后构作

$$\tilde{C}=C^*\bigcup_{g_{11}}\Delta_{11}\bigcup_{g_{12}}\Delta_{12}\cdots\bigcup_{g_{1m_1}}\Delta_{1m_1}$$
$$\bigcup_{g_{21}}\Delta_{21}\bigcup_{g_{22}}\Delta_{22}\cdots\bigcup_{g_{2m_2}}\Delta_{2m_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bigcup_{g_{l1}}\Delta_{l1}\bigcup_{g_{l2}}\Delta_{l2}\cdots\bigcup_{g_{lm_l}}\Delta_{lm_l}.$$

$\tilde{C}$ 的紧致性是显然的，读者可自行验证。从 $\tilde{C}$ 到 $P^2\mathbf{C}$ 的映射 σ，以显然的方式给出：

$$\sigma(p)=\begin{cases}p, & p\in C^*,\\ g_{rs_r}(p), & p\in\Delta_{rs_r}\end{cases}$$
$$(1\leqslant r\leqslant l\ ,\ 1\leqslant s_r\leqslant m_r).$$

§7　因子，相交数，Bezout定理

定义7.1　设 $\tilde{C}$ 是一个紧 Riemann 面，$\tilde{C}$ 的一个因子是一个有限形式和

$$D=m_1p_1+\cdots+m_lp_l,$$

这里 $m_j\in\mathbf{Z}$，$p_j\in\tilde{C}\,(j=1,\cdots,l)$。因子 D 的次数定义为

$$\deg(D)=\sum_{j=1}^{l}m_j.$$

$\tilde{C}$ 的所有因子的集合，按照逐项相加的加法，成为一个Abel群，称为 $\tilde{C}$ 的因子群，记为 $\mathrm{Div}(\tilde{C})$。而 deg 定义了一个群同态

$$\deg: \mathrm{Div}(\tilde{C}) \to \boldsymbol{Z}.$$

对于 $f \in K(\tilde{C})$，按下述定义的一类因子是很有用的：

$$(f) = \sum_{p \in \tilde{C}} \nu_p(f) p.$$

习题7.1 试证

$$(fg) = (f) + (g), \quad \left(\frac{1}{f}\right) = -(f).$$

采用因子的记号，第一章定理4.9可以叙述为：

定理7.2 如果 $f \in K(\tilde{C})$不是常数，那么

$$\deg(f) = \sum_{p \in \tilde{C}} \nu_p(f) = 0.$$

定义7.3 设平面代数曲线

$$V = \{(x, y) \in \boldsymbol{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

与

$$W = \{(x, y) \in \boldsymbol{C}^2 \mid h(x, y) = 0\}$$

相交于 p。由引理 5.1 我们可以假设 $p = (0, 0)$，并且

$$f(x, y) = y^k + a_1(x) y^{k-1} + \cdots + a_k(x),$$

$$a_j(x) \in \boldsymbol{C}[x], \quad \deg a_j(x) \leqslant j \text{ 或者 } a_j(x) \equiv 0.$$

如果V在 $(0, 0)$ 邻近局部不可约，即 f 在 $\boldsymbol{C}\{x\}[y]$ 不可约，我们可以构造局部正则化

$$g: t \mapsto (t^k, y_v(t^k)),$$

并且定义V和W在 $p = (0, 0)$处的**相交数**为

$$(V \cdot W)_{p=(0,0)} = \nu_0(g^* h) = \nu_0(h(t^k, y_v(t^k)))$$

（即 $h(t^k, y_v(t^k))$ 在 $t = 0$ 处关于 t 的阶数）。对于一般情形，设V在 $p = (0, 0)$邻近分解为不可约局部解析曲线支

$$V = m_1 V_1 + \cdots + m_l V_l$$

（即 $f = f_1^{m_1} \cdots f_l^{m_l}$，$f_j$ 在 $\boldsymbol{C}\{x\}[y]$ 中不可约），这时我们定义 V 和W在 $p = (0, 0)$处的**相交数**为

$$(V\cdot W)_p=\sum_{j=1}^{l}(V_j\cdot W)_p.$$

习题7.2 试证$(V\cdot W)_p=(W\cdot V)_p$.

提示 类似于引理5.1的做法，可选择坐标系使得$p=(0,0)$，并使V和W的仿射方程$f(x,y)=0$和$h(x,y)=0$满足

$$\begin{aligned}
&f(x,y)=y^m+a_1(x)y^{m-1}+\cdots+a_m(x),\\
&a_j(x)\in \mathbf{C}[x],\quad \deg a_j\leqslant j \text{ 或 } a_j=0;\\
&h(x,y)=y^n+b_1(x)y^{n-1}+\cdots+b_n(x),\\
&b_k(x)\in \mathbf{C}[x],\quad \deg b_k\leqslant k \text{ 或 } b_k=0.
\end{aligned}$$

将f和h分解为单位与不可约 Weierstrass 多项式的乘积

$$\begin{aligned}
&f(x,y)=\alpha(x,y)v_1(x,y)\cdots v_r(x,y),\\
&h(x,y)=\beta(x,y)w_1(x,y)\cdots w_s(x,y).
\end{aligned}$$

设$y_\mu^{(j)}(x)\,(\mu=1,\cdots,m_j)$和$z_\nu^{(k)}(x)\,(\nu=1,\cdots,n_k)$分别是

$$v_j(x,y)=0,\quad w_k(x,y)=0$$
$$(j=1,\cdots,r;\ k=1,\cdots,s)$$

的根的解析分支。按照定义

$$\begin{aligned}
(V\cdot W)_p&=\sum_{j=1}^{r}\text{order}\, h(t^{m_j},y_\mu^{(j)}(t^{m_j}))\\
&=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\text{order}\, w_k(t^{m_j},y_\mu^{(j)}(t^{m_j}))\\
&=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\text{order}\prod_{\nu=1}^{n_k}(y_\mu^{(j)}(t^{m_j})-z_\nu^{(k)}(t^{m_j}))
\end{aligned}$$

（这里 order 表示在$t=0$处关于t的阶数）。类似地，有

$$(W\cdot V)_p=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}\text{order}\prod_{\mu=1}^{m_j}(z_\nu^{(k)}(t^{n_k})-y_\mu^{(j)}(t^{n_k})).$$

但

$$\text{order}\prod_{\nu=1}^{n_k}(y_\mu^{(j)}(t^{m_j})-z_\nu^{(k)}(t^{m_j}))$$

$$=\frac{1}{m_j n_k}\text{order}\prod_{\mu=1}^{m_j}\prod_{\nu=1}^{n_k}(y_\mu^{(j)}(t^{m_j n_k})-z_\nu^{(k)}(t^{m_j n_k}))$$

$$=\text{order}\prod_{\mu=1}^{m_j}(z_\nu^{(k)}(t^{n_k})-y_\mu^{(j)}(t^{n_k}))。$$

因而

$$(V\cdot W)_p=(W\cdot V)_p。$$

习题7.3 设$p=(0,0)$是平面代数曲线

$$V=\{f(x,y)=0\}$$

的k重点和平面代数曲线

$$W=\{h(x,y)=0\}$$

的m重点（即

$$f(x,y)=f_k(x,y)+f_{k+1}(x,y)+\cdots,$$

f_i是i次齐次多项式，$i=k,k+1,\cdots,\deg f$；

$$h(x,y)=h_m(x,y)+h_{m+1}(x,y)+\cdots,$$

h_j是j次齐次多项式，$j=m,m+1,\cdots,\deg h$），试证

$$(V\cdot W)_p\geqslant km。$$

提示 将$f(x,y)$分解为单位及不可约 Weierstrass 多项式的乘积

$$f(x,y)=a(x,y)v_1(x,y)\cdots v_r(x,y),$$

这里

$$v_i(x,y)=y^{l_i}+a_{l_i-1}^{(i)}(x)y^{l_i-1}+\cdots+a_0^{(i)}(x)$$

$$(i=1,2,\cdots,r)。$$

设$y_\mu^{(i)}(x)$是$v_i(x,y)=0$的根的解析分支，按照定义

$$(V\cdot W)_p=\sum_{i=1}^{r}\text{order}\,h(t^{l_i},y_\mu^{(i)}(t^{l_i}))。$$

任意$\varphi(x,y)\in\mathscr{O}$可以写成按升幂排列的齐次多项式的级数和

$$\varphi(x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x,y),\quad \deg\varphi_j=j.$$

如果

$$\varphi_0\equiv\varphi_1\equiv\cdots\equiv\varphi_{j-1}\equiv0,\quad \varphi_j\not\equiv0,$$

则称φ的阶数为j，记为

$$\text{order }\varphi=j.$$

设 $\text{order } v_i(x,y)=k_i$，那么

$$l_i\geqslant k_i,\quad \text{order } a_0^{(i)}(x)\geqslant k_i.$$

由此可得

$$\text{order } y_\mu^{(i)}(t^{l_i})=\frac{1}{l_i}\text{order}\prod_{\mu=1}^{l_i}y_\mu^{(i)}(t^{l_i})$$

$$=\frac{1}{l_i}\text{order } a_0^{(i)}(t^{l_i})$$

$$=\text{order } a_0^{(i)}(x)\geqslant k_i,$$

$$\text{order } h(t^{l_i},y_\mu^{(i)}(t^{l_i}))\geqslant k_i m.$$

因而

$$(V\cdot W)_p=\sum_{i=1}^{r}\text{order } h(t^{l_i},y_\mu^{(i)}(t^{l_i}))$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{r}k_i m=km.$$

习题7.4 对于曲线

$$V=\{y-\lambda x=0\},\quad W=\{y^2-x^3=0\},$$

计算$(V\cdot W)_{(0,0)}$（讨论λ的不同情形）。

定义7.4 对于代数曲线V和W

$$(V\cdot W)\xlongequal{\text{def}}\sum_{p\in V\cap W}(V\cdot W)_p.$$

下面，我们来证明经典曲线论中的一个重要结果。

定理7.5 (Bezout) 设两平面代数曲线C和E无共同的曲线分支(即表示C和E的方程的左端无公因式)，那么

$$(C \cdot E) = \sum_{p \in C \cap E} (C \cdot E)_p = \deg C \cdot \deg E.$$

证明

第一步 如果

$$C = m_1 C_1 + \cdots + m_l C_l,$$

$C_j (j = 1, \cdots, l)$是不可约代数曲线，那么

$$(C \cdot E) = \sum_{j=1}^{l} m_j (C_j \cdot E),$$

而

$$\deg C = \sum_{j=1}^{l} m_j \deg C_j,$$

$$\deg C \cdot \deg E = \sum_{j=1}^{l} m_j \deg C_j \deg E.$$

因此只须对C是不可约代数曲线的情形证明定理即可。

第二步 如果$C = L$是$P^2\mathbf{C}$中的一条直线，那么第一章的定理8.6用相交数的术语重新加以叙述就是

$$\sum_{p \in \mathbf{L} \cap E} (L \cdot E)_p = \deg E (= \deg L \cdot \deg E).$$

第三步 设C不可约并且不是一条直线。任取k $(k = \deg E)$条直线

$$L_j = \{\xi \in P^2\mathbf{C} \mid L_j(\xi) = 0\} \quad (j = 1, \cdots, k),$$

则

$$(C \cdot L_j) = \sum_{q \in C \cap \mathbf{L}_j} (C \cdot L_j)_q = \deg C$$

$$(j = 1, 2, \cdots, k).$$

设 $E=\{\xi\in P^2\boldsymbol{C}\,|\,H(\xi)=0\}$，则

$$\varphi=\frac{H(\xi)}{L_1(\xi)\cdots L_k(\xi)}$$

定义了 $P^2\boldsymbol{C}$ 上的一个半纯函数(这由 $\deg H=k$ 容易看出)。又设

$$g:\ \tilde{C}\to C$$

是 C 的正则化，则

$$g^*\varphi=\varphi\circ g\in K(\tilde{C}),$$

而

$$\deg(\varphi\circ g)=\deg\Big(\sum_{p\in C\cap E}(C\cdot E)_p p-\sum_{j=1}^{k}\sum_{q\in C\cap L_j}(C\cdot L_j)_q q\Big).$$

注意到

$$\sum_{q\in C\cap L_j}(C\cdot L_j)_q=\deg C\quad(j=1,\cdots,k),$$

利用定理 7.2，我们得到

$$\begin{aligned}0&=\deg(\varphi\circ g)\\&=\sum_{p\in C\cap E}(C\cdot E)_p-\sum_{j=1}^{k}\sum_{q\in C\cap L_j}(C\cdot L_j)_q\\&=\sum_{p\in C\cap E}(C\cdot E)_p-\deg C\cdot\deg E.\ \blacksquare\end{aligned}$$

例 1 一条不可约曲线 $C\subset P^2\boldsymbol{C}$ 称为是**有理的**，如果它的正则化

$$\tilde{C}=P^1\boldsymbol{C}.$$

利用 Bezout定理，我们可以证明以下有趣事实：具有一个通常奇点的不可约三次平面代数曲线是有理的。

证明概要 这奇点 p 必须是二重点（具有三重点的三次代数曲线是可约的）。我们把 $P^1\mathbf{C}$ 与通过奇点 p 的直线的集合等同起来。根据 Bezout 定理，除了过 p 点的 C 的两条切线 L_1 和 L_2 而外，每一过 p 点的直线与 C 相交于另一点。我们让每一条这样的直线同它与 C 的另一交点对应，而让过 p 点的两条切线分别表示不同曲线支上的 p 点，这样得到 $P^1\mathbf{C}$ 到 C 的对应关系：

$$\begin{array}{ccc} P^1\mathbf{C}\setminus\{L_1, L_2\} & \longrightarrow & P^1\mathbf{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C\setminus\{2p\} & \longrightarrow & C \end{array}$$

这正是 $P^1\mathbf{C}$ 作为 C 的正则化的几何说明。

习题7.5 如果一条 n 次曲线有 $[n/2]+1$ 个奇点在一条直线 L 上，那么这条曲线必以 L 为一曲线分支。

提示 假设不是这样，考虑 $\sum(L\cdot C)_p$ 并由 Bezout 定理导出矛盾。

习题7.6 试证具有四个奇点的四次曲线可约。

习题7.7 试证具有三个奇点的四次不可约曲线是有理的。

提示 设 p_1, p_2, p_3 是 C 的三个奇点而 p_4 是另一个固定点。p_1, p_2, p_3 应是二重点，而且这四点应处于一般位置。于是我们可以设

$$p_1=[1,0,0], \quad p_2=[0,1,0],$$
$$p_3=[0,0,1], \quad p_4=[1,1,1].$$

考虑通过这四点的二次曲线

$$Q(\xi) = \sum_{i,j=0}^{2} Q_{ij}\xi^i\xi^j = 0,$$

方阵 (Q_{ij}) 应具有以下形式

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_{01} & Q_{02} \\ Q_{01} & 0 & -Q_{01}-Q_{02} \\ Q_{02} & -Q_{01}-Q_{02} & 0 \end{pmatrix},$$

而(Q_{ij})与$(\lambda Q_{ij})(\lambda \neq 0)$表示同一二次曲线。因而通过$p_1, p_2, p_3, p_4$四点的二次曲线作成$P^1\mathbf{C}$。又，按照 Bezout 定理

$$\sum_{q \in C \cap Q} (C \cdot Q)_q = 8.$$

由此得知Q与C还应相交于另一点，除非Q与C在奇点p_1, p_2, p_3之一处的某曲线支有公切线。我们取

$$P^1\mathbf{C} = \{\text{过} p_1, p_2, p_3, p_4 \text{的二次曲线}\},$$

它可构成C的正则化。

§8 分歧因子，Riemann-Hurwitz公式

定义8.1 设C, C'是 Riemann 面，

$$f: C \to C'$$

是全纯映射。对于由

$$\{U'_\alpha, w_\alpha, g_\alpha(w_\alpha)dw_\alpha\}$$

给出的C'上的半纯微分ω，取C的全纯坐标覆盖$\{(U_i, z_i)\}$，使得

$$f(U_i) = U'_{\alpha(i)}.$$

设f的局部坐标表示为

$$w_\alpha = f_{\alpha_i}(z_i).$$

考虑

$$\left\{U_i, z_i, g_\alpha(f_{\alpha_i}(z_i))\frac{\mathrm{d}f_{\alpha_i}(z_i)}{\mathrm{d}z_i}\mathrm{d}z_i\right\}.$$

容易验证，上式给出C上的一个半纯微分(见下面习题8.1)，我们把这半纯微分记为$f^*\omega$。

习题8.1 验证上面定义中的论断。

下面，我们讨论从紧 Riemann 面C到紧 Riemann 面C'的非常值全纯映射

$$f: C \to C'.$$

设$f(p)=q$，我们可以选择C在p点邻近的局部坐标z和C'在q点邻近的局部坐标w，使得

$$z(p)=0, \quad w(q)=0,$$

并使f的局部表示形如

$$w=z^{\nu}, \quad z\in\Delta, w\in\Delta', \quad \nu\geqslant 1.$$

这样，对于$w\in\Delta'$，$w\neq 0$，我们有

$$f^{-1}(w)=\{C\text{上}\nu\text{个不同的点}\},$$

而

$$f^{-1}(0)=\nu\cdot 0 \quad (0\text{计数}\nu\text{次}).$$

我们称$\nu=\nu_f(p)$为f在p点的重数。

对任意$q\in C'$，考虑

$$\sum_{f(p)=q}\nu_f(p),$$

这是一个有限和(因为f不是常值函数)。这和数对于$q\in C'$是局部常值的，即对于邻近q的$q'\in C'$有

$$\sum_{f(p')=q'}\nu_f(p')=\sum_{f(p)=q}\nu_f(p).$$

于是，由于C'的连通性，和数

$$\sum_{f(p)=q}\nu_f(p)$$

对于$q\in C'$是一常数。

定义8.2 a) $f^{-1}(q)\overset{\text{def}}{=\!=}\sum_{f(p)=q}\nu_f(p)p\in \mathrm{Div}(C)$;

b) $\deg f\overset{\text{def}}{=\!=}\deg f^{-1}(q)=\sum_{f(p)=q}\nu_f(p)$.

我们称$\deg f$为f的映射度。

由前面的讨论可知，使得$\nu_f(p)>1$的点p是孤立的，因而

$$\{p\in C\,|\,\nu_f(p)>1\}$$

是有限集。

定义8.3 我们称

$$R=\sum_{p\in C}(\nu_f(p)-1)p\in \mathrm{Div}(C)$$

为 f 的**分歧因子**。

定义8.4 设 C 是一个紧 Riemann面，$\omega\in K^1(C)$是非平凡半纯微分，我们定义

$$(\omega)=\sum_{p\in C}\nu_p(\omega)\cdot p.$$

定理8.5(Riemann–Hurwitz 公式) 设 C 和 C' 是紧 Riemann 面，它们的亏格分别为

$$\mathrm{genus}(C)=g \quad 和 \quad \mathrm{genus}(C')=g';$$

而 f：$C\to C'$ 是一非常值全纯映射，其映射度为

$$\deg f=n;$$

以 R 记 f 的分歧因子

$$R=\sum_{p\in C}(\nu_f(p)-1)p,$$

那么

$$\deg R=2(g+n-ng'-1).$$

证明 我们将利用以下事实：任何紧Riemann 面上存在有非平凡的半纯微分。

取一个非平凡的半纯微分 $\omega\in K^1(C')$，我们来计算 $(f^*\omega)$。局部地，f 表示为

$$w=z^\nu,$$

而

$$\omega=g(w)\mathrm{d}w,$$

因而

$$f^*\omega=\nu g(z^\nu)z^{\nu-1}\mathrm{d}z,$$

$$\nu_{f^*\omega}(p)=\nu_f(p)\nu_\omega(f(p))+\nu_f(p)-1.$$

由此，我们得到

$$(f^*\omega)=\sum_p \nu_f(p)\nu_\omega(f(p))p+R$$

$$=\sum_q \nu_\omega(q)\sum_{f(p)=q}\nu_f(p)p+R$$

$$=f^{-1}((\omega))+R,$$

这里

$$f^{-1}((\omega))=f^{-1}\left(\sum_q \nu_\omega(q)q\right)$$

$$=\sum_q \nu_\omega(q)f^{-1}(q)$$

$$=\sum_q \nu_\omega(q)\left(\sum_{f(p)=q}\nu_f(p)p\right).$$

于是我们有

$$\deg(f^*\omega)=\deg f^{-1}((\omega))+\deg R.$$

由 Poincaré–Hopf 公式

$$\deg(f^*\omega)=2g-2,\qquad \deg(\omega)=2g'-2.$$

经直接计算得到

$$\deg f^{-1}((\omega))=\sum_q \nu_\omega(q)\left(\sum_{f(p)=q}\nu_f(p)\right)$$

$$=\deg(\omega)\deg f$$

$$=(2g'-2)n.$$

这样，我们得到

$$2g-2=(2g'-2)n+\deg R.$$

由此立即得到Riemann–Hurwitz 公式

$$\deg R=2(g+n-ng'-1). \quad \blacksquare$$

习题8.2 如果 $n\geqslant 1$，试证 $g'\leqslant g$。

习题8.3 设$C\to P^1C$是标准方式的嵌入。如果在此局部坐标下，f：$P^1C\to P^1C$的表示式为

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n,$$

问：$\deg f$ 是多少？R 是什么？试用 Riemann-Hurwitz 公式检验你的答案。

习题8.4 设

$$\Lambda=\{m_1w_1+m_2w_2 \mid m_1,\ m_2\in \boldsymbol{Z}\}$$

是$\boldsymbol{C}$中的一个格，$C=\boldsymbol{C}/\Lambda$。设非零复数 a 满足

$$a\Lambda\subset\Lambda$$

（这意味着 $aw_1\in\Lambda$，$aw_2\in\Lambda$，这样的 a 称为是C的复乘子）。考虑由

$$a[z]\overset{\text{def}}{=\!=}[az]$$

定义的映射

$$a:\ C\to C.$$

易见这是一个全纯映射。试证其分歧因子为

$$R=0,$$

并且

$$\deg a=\#(\Lambda/a\Lambda)$$

（有限群$\Lambda/a\Lambda$的阶数）。

习题8.5 设C是一个紧 Riemann 面，

$$x,y:\ C\to P^1\boldsymbol{C}$$

是全纯映射，$\deg x=d$。于是，$\forall\xi\in P^1\boldsymbol{C}$，$x^{-1}(\xi)$由 d 个点组成（d 个点可相同），我们记

$$x^{-1}(\xi)=p_1(\xi)+\cdots+p_d(\xi).$$

考虑

$$a_1(\xi)=-\sum_i y(p_i(\xi)),$$

$$a_2(\xi)=\sum_{i<j} y(p_i(\xi))y(p_j(\xi)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_d(\xi)=(-1)^d y(p_1(\xi))\cdots y(p_d(\xi)),$$

置

$$f(\xi,\eta)=\eta^d+a_1(\xi)\eta^{d-1}+\cdots+a_d(\xi)$$
$$=\prod_{i=1}^{d}(\eta-y(p_i(\xi)))。$$

试证：

a) $a_i(\xi)$有确切定义，$a_i(\xi)\in K(P^1\boldsymbol{C})$；

b) $f(\xi,\eta)\in K(P^1\boldsymbol{C})[\eta]$；

c) $f(x,y)=0$。

由此，我们知道任意全纯映射 g：$C\to P^2\boldsymbol{C}$ 是一代数曲线。

提示 参照§2中代数曲线连通性的证明。

§9 亏格公式

定理9.1 设$C\subset P^2$是d次不可约代数曲线，它的δ个奇点都是通常二重点；σ：$\tilde{C}\to C$是其正则化，

$$\text{genus}(\tilde{C})=g。$$

在这些条件下，我们有以下**亏格公式**：

$$g=\frac{(d-1)(d-2)}{2}-\delta。$$

先介绍证明的思路。设 $C=\{(x,y)\in\boldsymbol{C}^2\,|\,f(x,y)=0\}$。选择适当的坐标系我们可以假定：$y$轴上的无穷远点[0,0,1]不在曲线$C$上，并且$C$在奇点处沒有竖直切线。考虑另一代数曲线

$$E=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{C}^2\,\middle|\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\right\}。$$

我们将用两种方式来计算$(E\cdot C)$。

首先，由 Bezout 定理

$$(E\cdot C)=d(d-1)。$$

其次，我们考虑

$$E \cap C = \left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0\right\} \cap \{f(x,y) = 0\}.$$

这集合由两部分组成：C 上具有竖直切线的点及 C 的奇点。因而

$$(E \cdot C) = \sum_p{}'(E \cdot C)_p + \sum_{j=1}^{\delta}(E \cdot C)_{p_j},$$

这里求和号 $\sum'$ 表示对具有竖直切线的点求和，而 $p_1, \cdots, p_\delta$ 表示 C 的 δ 个通常二重点。为计算 $\sum'(E \cdot C)_p$，我们考虑映射：

$$x = \pi \circ \sigma: \ \tilde{C} \to P^1\mathbf{C},$$

这里 π 表示从 $[0,0,1]$ 到 x 轴所作的投影映射（竖直投影）。我们将证明

$$\sum_p{}'(E \cdot C)_p = \deg R_x,$$

这里 R_x 是映射 x 的分歧因子。又，经直接计算得到

$$\sum_{j=1}^{\delta}(E \cdot C)_{p_j} = 2\delta.$$

这样，我们得到

$$(E \cdot C) = \deg R_x + 2\delta.$$

比较两种方法计算的结果，我们得到

$$d(d-1) = \deg R_x + 2\delta.$$

再利用 Riemann-Hurwitz 公式立即就得到亏格公式。

下面，我们来陈述证明的细节。

亏格公式的证明 我们可以适当选择 $P^2\mathbf{C}$ 中的坐标系使得：

a) L_∞ 与 C 交于 d 个不同的点（因而 L_∞ 不是 C 的切线也不通过 C 的奇点）；

b) 在二重点 $p_1, \cdots, p_\delta$ 处，C 的任何切线都不通过 $[0,0,1]$；

c) $[0,0,1] \overline{\in} C$。

第一步 连同曲线C一起，我们考虑另一条代数曲线

$$E=\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\right\}.$$

按照 Bezout 定理

$$(E\cdot C)=d(d-1).$$

设π是从[0,0,1]到x轴的投影映射（向x轴作的垂直投影）。考虑全纯映射

$$x=\pi\circ\sigma:\ \tilde{C}\to P^1\boldsymbol{C},$$

我们将利用这一映射用另一种方法来计算$(E\cdot C)$。

第二步 设C在p点有竖直切线，因而

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_p=0.$$

按照我们的坐标系的选取法，p必是C的光滑点，因而

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_p\neq 0.$$

在p的一个邻域内，可以取y为独立变元而解出x作为其函数：$x=x(y)$。在这邻域内有

$$\frac{\partial f(x(y),y)}{\partial x}\,x'(y)+\frac{\partial f(x(y),y)}{\partial y}=0.$$

由上式我们看到

$$\begin{aligned}\text{order}\,\frac{\partial f(x(y),y)}{\partial y}&=\text{order}\,x'(y)\\&=\text{order}\,x(y)-1,\end{aligned}$$

因而

$$(E\cdot C)_p=\nu_x(p)-1.$$

对一切有竖直切线的点求和，我们得到

$$\sum_p{}'(E\cdot C)_p=\deg R_x.$$

如果记

$$D=\{\mathscr{D}(f)(x)=0\},$$

那么在$\boldsymbol{C}\backslash D$上 x 是 d 对 1 的映射，因而

$$\deg x=d.$$

由 Riemann-Hurwitz 公式

$$\sum_p{}'(E\cdot C)_p=\deg R=2(g+d-1),$$

第三步 设p_i是二重点之一，经适当的平移坐标变换我们可以假定$p_i=(0,0)$。这样

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+f_3(x,y)+\cdots,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2bx+2cy+\cdots.$$

由于p_i是通常二重点而C在$p_i=(0,0)$没有竖直切线，所以

$$ac-b^2\neq0,\qquad c\neq0.$$

由隐函数定理，我们可以从

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\doteq0$$

中解出 y 作为 x 的函数

$$y=y(x)=-\frac{b}{c}x+\cdots.$$

经直接计算得到

$$f(x,y(x))=ax^2+2bxy(x)+c(y(x))^2+\cdots$$

$$=\frac{ac-b^2}{c}x^2+\cdots$$

$$(ac-b^2\neq0).$$

这说明

$$(E\cdot C)_{p_i}=2.$$

对所有的二重点求和，我们得到

$$\sum_{j=1}^{\delta}(E \cdot C)_{p_j} = 2\delta.$$

连同第二步中所获得的结果，我们得到

$$d(d-1) = \sum_{p}{}'(E \cdot C)_p + \sum_{j=1}^{\delta}(E \cdot C)_{p_j}$$

$$= 2(g + d - 1) + 2\delta.$$

由此给出亏格公式：

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta. \quad \blacksquare$$

亏格公式有十分重要的意义，因为它揭示了代数曲线C的“内在”的拓扑不变量g与“外在”的量d,δ之间的关系。

第三章　Riemann-Roch定理

§1　预 备 知 识

为叙述并证明 Riemann-Roch 定理，我们引进一些记号和定义，并做一些必要的说明。

设 C 是一个紧Riemann 面，

$$D=\sum_{i=1}^{k} n_i p_i \in \mathrm{Div}(C).$$

定义1.1　如果对所有的 $i=1,2,\cdots,k$，都有 $n_i\geqslant 0$，则称 D 为 C 的一个**有效因子**，记为 $D\geqslant 0$。

显然，C 的任何一个因子都能表示成两个有效因子之差。记

$$\mathscr{L}(D)=\{f\in K(C)\,|\,(f)+D\geqslant 0\}. \tag{1.1}$$

容易看出，$f\in\mathscr{L}(D)$意味着：若因子 D 中 p_i 的系数 $n_i<0$，则 f 必须以 p_i 为零点，且零点的阶不小于 $|n_i|$；若 $n_i\geqslant 0$，则 f 可以以 p_i 为极点，但极点的阶不能大于 n_i。显然，$\mathscr{L}(D)$ 构成复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间，记

$$\dim \mathscr{L}(D)=l(D). \tag{1.2}$$

又记

$$K^1(D)=\{\omega\in K^1(C)\,|\,(\omega)\geqslant D\}. \tag{1.3}$$

$\omega\in K^1(D)$意味着：若 $n_i<0$，则 ω 可以以 p_i 为极点，但极点的阶不能大于 $|n_i|$；若 $n_i>0$，则 ω 必须以 p_i 为零点，且零点的阶不能小于 n_i。显然，$K^1(D)$也构成$\boldsymbol{C}$上的线性空间，记

$$\dim K^1(D)=i(D). \tag{1.4}$$

在证明 Riemann-Roch 定理的过程中，$D\geqslant 0$ 的情形是有特

殊的重要性的。对这种情形，每一个常值函数都属于$\mathscr{L}(D)$，即$\boldsymbol{C}\subset\mathscr{L}(D)$。这时，我们常常以记号$\Omega^1(D)$代替$K^1(D)$。所谓$\omega\in\Omega^1(D)$，即是说$\omega$是一个全纯微分，以$p_i(i=1,2,\cdots,k)$为零点，且零点的阶不小于$n_i$。$\Omega^1(D)$是$\Omega^1(C)$的线性子空间。

定义1.2 设$D,E\in\mathrm{Div}(C)$。D和E被称为是**线性等价**的（记为$D\sim E$），如果存在$f\in k(C)$，使得$(f)=D-E$。

命题1.3 如果$D\sim E$，则

$\mathscr{L}(D)\cong\mathscr{L}(E)$，　$K^1(D)\cong K^1(E)$，　$\deg D=\deg E$。

证明 因为$D\sim E$，故存在$f\in k(C)$，使得

$$(f)=D-E.$$

对任意$g\in\mathscr{L}(D)$，有$(g)+D\geqslant 0$，因此

$$\begin{aligned}(fg)+E&=(f)+(g)+E=D-E+(g)+E\\&=(g)+D\geqslant 0.\end{aligned}$$

故有映射

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(D)&\to\mathscr{L}(E),\\g&\mapsto fg.\end{aligned}$$

易验证这映射是线性空间的同态，并且有逆：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(E)&\to\mathscr{L}(D),\\g&\mapsto\frac{g}{f}.\end{aligned}$$

因而

$$\mathscr{L}(D)\cong\mathscr{L}(E).$$

类似地，可证

$$K^1(D)\cong K^1(E).$$

至于第三个结论，由于$f\in k(C)$，故

$$\sum\mathrm{Res}\frac{f'}{f}=0.$$

但

$$\sum \operatorname{Res} \frac{f'}{f} = \deg(f) = \deg D - \deg E,$$

所以

$$\deg D = \deg E. \quad \blacksquare$$

命题1.4(Brill–Noether 互反性) 设 $\omega \in K^1(C)$, $(\omega) = D + E$, 则

$$\mathscr{L}(D) \cong K^1(E), \quad \mathscr{L}(E) \cong K^1(D).$$

证明 对任意 $f \in \mathscr{L}(D)$, 有 $(f) \geqslant -D$, 因此

$$(f\omega) = (f) + (\omega) \geqslant -D + D + E = E.$$

故有映射

$$\mathscr{L}(D) \to K^1(E),$$
$$f \mapsto f\omega.$$

易验证这映射是线性空间的同态. 并且有逆:

$$K^1(E) \to \mathscr{L}(D),$$

$$\varphi \mapsto \frac{\varphi}{\omega}.$$

故有同构

$$\mathscr{L}(D) \cong K^1(E).$$

由 D 和 E 的对称性可知亦有

$$\mathscr{L}(E) \cong K^1(D). \quad \blacksquare$$

下面引进 Laurent 尾的概念。

定义1.5 设 $\sum_{j=-n}^{\infty} a_j z^j$ 是 Laurent 级数, 则它的奇异部分

$$\sum_{j=-n}^{-1} a_j z^j$$

称为一个 Laurent 尾。n 称为此 Laurent 尾的阶。

设 C 和 D 如前所述, 且 $D \geqslant 0$。设 $z_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 是 p_i 附近的局部坐标, $z_i(p_i) = 0$, 如果对每个 p_i 都给一个 n_i 阶的

Laurent 尾

$$\eta_i = \frac{a_{in_i}}{z_i^{n_i}} + \frac{a_{in_i-1}}{z_i^{n_i-1}} + \cdots + \frac{a_{i1}}{z_i},$$

自然地可以提这样的问题：在什么条件下存在 $f \in K(C)$，使得 f 在 p_i 附近以 η_i 为 Laurent 尾？这就是所谓 Mittag-Leffler 问题。它比 Riemann-Roch 定理更强。如果我们能够回答这个问题，就可以由此证明 Riemann-Roch 定理。

容易看出，紧 Riemann 面 C 上的半纯函数在相差一个常值函数的意义下被它的 Laurent 尾所唯一决定。事实上，如果 f_1，$f_2 \in K(C)$ 具有相同的 Laurent 尾，则 $f_1 - f_2$ 是 C 上的全纯函数。但 C 紧致，故 $f_1 - f_2$ 为常值函数。这个结果意味着同态

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}(D)/\mathbf{C} \longrightarrow \{(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k)\}, \\ &[f] \longmapsto f \text{ 在点 } p_1, p_2, \cdots, p_k \text{ 附近的 Laurent尾} \end{aligned} \tag{1.5}$$

是单一的，这里 $[f]$ 表示函数 f 所在的陪集。

此外，对 D 中每个点 $p_i (i = 1, 2, \cdots, k)$，有同构

$$\{\eta_i\} \longrightarrow \mathbf{C}^{n_i},$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{ij}}{z_i^j} \longmapsto (a_{in_i}, a_{in_i-1}, \cdots, a_{i1}),$$

故有同构

$$\{(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k)\} \cong \mathbf{C}^{n_1} \oplus \mathbf{C}^{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}^{n_k} \cong \mathbf{C}^d, \tag{1.6}$$

其中

$$d = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

在(1.5)与(1.6)式的意义下，我们可以把 $\mathscr{L}(D)/\mathbf{C}$ 视为 $\mathbf{C}^d$ 的线性子空间。

§2 $\Omega^1(C)$ 的维数

在第二章中我们证明了亏格公式，这个公式从一个方面揭示

了代数曲线的拓扑性质与其代数几何性质之间的联系。本节将要给出的关于$\Omega^1(C)$的维数的结论是这种联系的另一个方面。本节的结果是 Riemann-Roch 定理的一个特例，并将在 Riemann-Roch 定理的证明中起重要作用。

本节的主要结论是

定理2.1 设C是一个亏格为g的紧 Riemann 面，则

$$\dim\Omega^1(C) = g.$$

注记2.2 对于C是 Riemann 球面（即$g=0$）的情形，定理2.1已被证明过（见第一章习题4.3）。

我们将分两步证明定理2.1。首先证明

命题2.3 条件同定理2.1，则有

$$\dim\Omega^1(C)\geqslant g.$$

证明 我们从下述的一般事实出发：对于任一紧 Riemann 面C，都存在由C到$\boldsymbol{P}^2$的全纯映射π，使得$C'=\pi(C)$是$\boldsymbol{P}^2$中一条具有δ个通常的二重点（记为$p_1,p_2,\cdots,p_\delta$）的d次不可约代数曲线，而无其它重点（C是C'的正规化）。

若$d=1$或2，则$g=0$，此时定理2.1已被证明过。故我们下面假定$d\geqslant3$。

现设本命题中的C已如上所述全纯地映入$\boldsymbol{P}^2$内。在$\boldsymbol{P}^2$上进行适当的坐标变换，可以使C'与$\boldsymbol{P}^2$上的无穷远直线L_∞不相切，并且L_∞不经过$p_1,p_2,\cdots,p_\delta$中任一点，以及C'不经过点$[0,0,1]$。事实上，我们可以在$\boldsymbol{P}^2$上取一条与C'交于d个不同点的直线，将此直线作为L_∞，就能保证C'与L_∞不相切。这是因为，假若C'与L_∞相切，则在切点处C'与L_∞的相交数至少为2，这将导致

$$(C'\cdot L_\infty)\geqslant d+1,$$

与 Bezout 定理矛盾。类似的理由保证了L_∞不经过$p_1,p_2,\cdots,p_\delta$中任一点。再在L_∞上取一点，使它不在C'上，以此点作为$[0,0,1]$，这样选择的坐标系就符合我们的要求。

设 C' 在此坐标系下的仿射方程为 $f(x,y)=0$。

记 $\Gamma = p_1 + p_2 + \cdots + p_\delta$。以 S^{d-3} 表示复系数 $d-3$ 次三元齐次多项式集合。令

$$S^{d-3}(-\Gamma) = \{G(\xi^0,\xi^1,\xi^2) \in S^{d-3} \mid G(p_i)=0,\ \forall i=1,2,\cdots,\delta\}。$$

显然，S^{d-3} 与 $S^{d-3}(-\Gamma)$ 都构成复数域上的线性空间，且

$$\dim S^{d-3} = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)。$$

而一个多项式在某点 p_i 取值为零等价于此多项式的系数满足一个线性方程，故

$$\dim S^{d-3}(-\Gamma) \geqslant \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \delta = g$$

（这里应用了亏格公式）。

我们将构造由 $S^{d-3}(-\Gamma)$ 到 $\Omega^1(C)$ 的一个单一同态，这样就能保证

$$\dim \Omega^1(C) \geqslant \dim S^{d-3}(-\Gamma),$$

从而完成命题 2.3 的证明。

对任一 $G \in S^{d-3}(-\Gamma)$，记

$$g(x,y) = G(1,x,y)。$$

又记　$U_0 = \{[1,x,y] \in \boldsymbol{P}^2\}$，　$U_1 = \{[u,1,v] \in \boldsymbol{P}^2\}$。

定义

$$\alpha = \begin{cases} \left.\dfrac{g(x,y)\mathrm{d}x}{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}}\right|_{C'}, & \text{在 } C' \cap U_0 \text{上，当 } \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{C'} \neq 0, \\ -\left.\dfrac{g(x,y)\mathrm{d}y}{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}}\right|_{C'}, & \text{在 } C' \cap U_0 \text{上，当 } \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{C'} = 0, \\ -\left.\dfrac{g\left(\dfrac{1}{u},\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{1}{u},\dfrac{v}{u}\right)}\right|_{C'}, & \text{在 } C' \cap U_1 \text{上} \end{cases}$$

$\left(式中 \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{1}{u}, \dfrac{v}{u}\right)意为在\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}中以(x,y)=\left(\dfrac{1}{u}, \dfrac{v}{u}\right)代入\right)$。由于 C' 不经过点$[0,0,1]$，故 α 在整个 C' 上有定义。

注意，在 U_0 内 C' 的方程为 $f(x,y)=0$，故

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=0,$$

因此有

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}}\right|_{C'}=-\left.\frac{\mathrm{d}y}{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}}\right|_{C'}$$

所以在上述定义中 $\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{C'}=0$ 时的 α 是 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\neq 0$ 时的 α 的延拓。由此，容易验证 $\pi^*(\alpha)$ 是 C 上的半纯微分。故有映射

$$S^{d-3}(-\Gamma)\to K^1(C),$$
$$G\mapsto \omega_G=\pi^*(\alpha).$$

显然，此映射是 C 上的线性空间的同态，且是单一的。我们只需证明 ω_G 是 C 上的全纯微分。

由上述定义，ω_G 在 $\pi^{-1}(C'\cap U_0)$ 上的一点 p 取值 ∞ 只能在

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{p'}=0 \text{ 且 } \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{p'}=0$$

的情形下发生(这里 $p'=\pi(p)$)。这因为对 $p\in\pi^{-1}(C'\cap U_0)$，

$$|g(x,y)|_{p'}<\infty.$$

显然，此时 p' 是 C' 的二重点，故 $p'\in\Gamma$，所以

$$g(x,y)|_{p'}=0.$$

但 p' 是 f 的二阶零点，故 p' 是 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 的一阶零点，所以

$$\alpha|_{p'}=-\left.\frac{g(x,y)dy}{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}}\right|_{p'}\neq\infty.$$

这就是说，ω_G 在点 p 全纯。

再考察 ω_G 在$\pi^{-1}(C'\cap L_\infty)$上的全纯性。此时

$$a = -\left.\frac{u^{d-3}g\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)\mathrm{d}u}{u^{d-1}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)}\right|_{C'},$$

注意此式右端的分子、分母均是 u，v 的多项式。记上式的分母为 $h(u,v)$，只需说明 $h(u,v)$在 $C'\cap L_\infty$上不等于零。事实上，在 U_1中 C'的方程为

$$k(u,v)=u^d f\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)=0.$$

显然

$$\frac{\partial k(u,v)}{\partial v}=u^d\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)\cdot\frac{1}{u}=h(u,v).$$

假若 $p'\in C'\cap L_\infty$，使得

$$h(u,v)|_{p'}=0,$$

由于p'不是C'的重点，必有

$$\left.\frac{\partial k(u,v)}{\partial u}\right|_{p'}\neq 0.$$

由于 $p'\in L_\infty$，故 p'的坐标形如$[0,1,v]$。于是得到 C'在 p'处的切线为

$$\left.\frac{\partial k(u,v)}{\partial u}\right|_{p'}(u-0)=0,$$

即 C'在 p'处的切线为 L_∞。这与我们坐标系的选取相矛盾。∎

下面我们将证明

$$\dim\Omega^1(C)\leqslant g.$$

为证明这个不等式需要用到第一章§5的知识。

设C是一个亏格为 g 的紧 Riemann 面(见图3.1)，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots$.

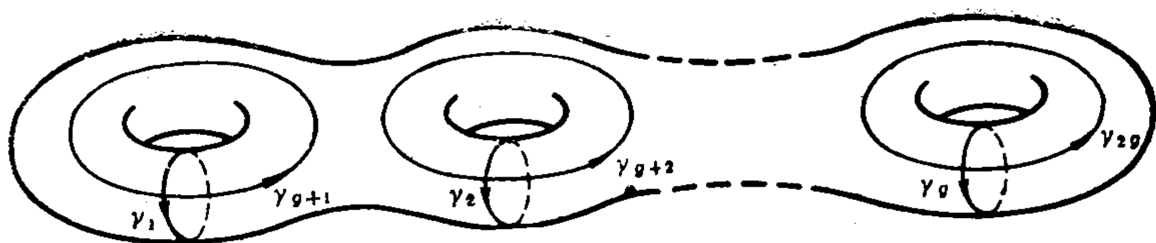


图 3.1

$\gamma_{2g-1},\gamma_{2g}$ 是C的同调群 $H_1(C,\boldsymbol{Z})$ 的一组$\boldsymbol{Z}$-基。设γ是C上的一条闭曲线，则有

$$\gamma=\sum_{i=1}^{2g}n_i\gamma_i+\partial\Omega,$$

其中 $n_i\in\boldsymbol{Z}(i=1,2,\cdots,2g)$，$\Omega$ 是C上的一个区域。以下将用$[\gamma]$表示γ所在的同调类。

由 Stokes 定理(参看第一章§5) 易得到

命题2.4 如果λ是C上的闭的微分 1-形式，则映射

$$\eta_\lambda:\ H_1(C,\boldsymbol{Z})\to\boldsymbol{C},$$
$$[\gamma]\mapsto\int_\gamma\lambda$$

的定义是合理的，其中γ是C上的闭曲线。

证明 如果γ'同调于γ，则$\gamma-\gamma'=\partial\Omega$，其中$\Omega$是$C$上的一个区域。由 Stokes 定理，有

$$\eta_\lambda(\gamma)-\eta_\lambda(\gamma')=\int_{\gamma-\gamma'}\lambda=\int_{\partial\Omega}\lambda=\iint_\Omega d\lambda=0. \blacksquare$$

命题2.5 如果λ是C上闭的微分 1-形式，且对所有的i，都有

$$\int_{\gamma_i}\lambda=0,$$

则λ是恰当的。

证明 取定C上的一点p_0。对C上任一点p，取一条由p_0到p的道路γ，定义

$$f(p)=\int_\gamma\lambda.$$

我们断言 $f(p)$ 与道路 γ 的选取无关。设 γ' 是由 p_0 到 p 的另一条道路，则 $\gamma-\gamma'$ 是 C 上的一条闭曲线。故

$$\gamma-\gamma'=\sum_{i=1}^{2g}n_i\gamma_i+\partial\Omega,$$

其中 $n_i\in\boldsymbol{Z}$，Ω 为 C 上的一个区域。由

$$\int_{\gamma_i}\lambda=0\quad(i=1,2,\cdots,2g)$$

以及

$$\int_{\partial\Omega}\lambda=\iint_{\Omega}\mathrm{d}\lambda=0,$$

即知

$$\int_{\gamma}\lambda=\int_{\gamma'}\lambda.$$

即 $f(p)$ 的定义与道路 γ 的选取无关。所以，f 是 C 上的有确切定义的 C^∞ 函数。由微积分基本定理，即有 $\mathrm{d}f=\lambda$。 ▎

命题2.6 设 C 是紧 Riemann 面，$\omega,\varphi\in\Omega^1(C)$。视 ω 和 $\bar{\varphi}$ 为 C 上的微分 1-形式，如果

$$\omega+\bar{\varphi}=\mathrm{d}f,$$

其中 f 为 C 上的 C^∞ 函数，则

$$\omega=\varphi=0.$$

证明 设 $\omega=h(z)\mathrm{d}z$，$\varphi=g(z)\mathrm{d}z$。则

$$\omega\wedge\varphi=0,$$

并且

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\varphi\wedge\bar{\varphi}=|g(z)|^2\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}=|g(z)|^2\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.$$

我们用反证法证明 $\varphi=0$。如果 $\varphi\neq0$，则

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\iint_C\varphi\wedge\bar{\varphi}=\iint_C|g(z)|^2\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v>0,\qquad(2.1)$$

但

$$\varphi\wedge\bar{\varphi}=\varphi\wedge\omega+\varphi\wedge\bar{\varphi}=\varphi\wedge(\omega+\bar{\varphi})=\varphi\wedge\mathrm{d}f,$$

可以断言

$$\iint_C \varphi\wedge\mathrm{d}f=0.$$

事实上，我们有

$$\mathrm{d}(f\varphi)=\mathrm{d}f\wedge\varphi+f\wedge\mathrm{d}\varphi.$$

由于 $\varphi\in\Omega^1(C)$，所以 g 是全纯的，因而

$$\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}=0.$$

故

$$\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}(g\mathrm{d}z)=\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}z$$

$$=\left(\frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}\right)\wedge\mathrm{d}z=0.$$

于是

$$\varphi\wedge\mathrm{d}f=-\mathrm{d}f\wedge\varphi=-\mathrm{d}(f\varphi).$$

注意到 $f\varphi$ 是 C 上的微分1-形式，由第一章 § 5 的推论 5.6，即知

$$\iint_C \mathrm{d}(f\varphi)=0.$$

所以

$$\iint_C \varphi\wedge\mathrm{d}f=-\iint_C \mathrm{d}(f\varphi)=0.$$

上式与(2.1)式矛盾。同样可证 $\omega=0$。▌

现在我们来证明定理2.1的另一个方面。

命题2.7 条件同定理2.1，则

$$\dim\Omega^1(C)\leqslant g.$$

证明 假若 $\dim\Omega^1(C)\geqslant g+1$，设 $\omega_1,\cdots,\omega_{2g+1}\in\Omega^1(C)$在 C 上线性无关。考虑一组等式

$$\int_{\gamma_i} \sum_{j=1}^{g+1} \left(\lambda^j \omega_j + \eta^j \overline{\omega}_j\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, 2g),$$

其中 γ_i 是 $H_1(C, \mathbf{Z})$ 的一组 $\mathbf{Z}$-基。视 $\lambda^1, \cdots, \lambda^{g+1}, \eta^1, \cdots, \eta^{g+1}$ 为未知量，则上述等式是这 $2g+2$ 个未知量的 $2g$ 个线性方程。此方程组必有非零解，设为 $\lambda_0^1, \cdots, \lambda_0^{g+1}, \eta_0^1, \cdots, \eta_0^{g+1}$。取

$$\omega = \sum_{j=1}^{g+1} \lambda_0^j \omega_j \in \Omega^1(C), \qquad \varphi = \sum_{j=1}^{g+1} \overline{\eta_0^j} \omega_j \in \Omega^1(C),$$

于是对所有的 $i = 1, 2, \cdots, 2g$，都有

$$\int_{\gamma_i} (\omega + \overline{\varphi}) = \int_{\gamma_i} \sum_{j=1}^{g+1} (\lambda_0^j \omega_j + \eta_0^j \overline{\omega}_j) = 0.$$

由命题2.5，存在 C 上的 C^∞ 函数 f，使

$$\omega + \overline{\varphi} = \mathrm{d}f.$$

再由命题2.6，有

$$\omega = \varphi = 0.$$

这与 $\lambda_0^1, \cdots, \lambda_0^{g+1}, \eta_0^1, \cdots, \eta_0^{g+1}$ 不全为零且 $\omega_1, \cdots, \omega_{g+1}$ 线性无关相矛盾。▌

§3 两个重要定理

上一节中所得的结果实际上已经给出了两个重要的定理——Hodge 定理和 De Rham 定理在紧 Riemann 面情形的证明。本节我们将介绍这两个定理。应当指出，本节的内容与本章的中心——证明 Riemann-Roch 定理并没有直接联系。

定义3.1 设 C 是一个紧 Riemann 面。所谓 C 的**第一上同调群**是指

$$H^1(C, \mathbf{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(H_1(C, \mathbf{Z}), \mathbf{C}).$$

定义3.2 C 的**第一 De Rham 上同调群**（记为 $H^1_{DR}(C)$），定义为由 C 上的全体闭的微分 1-形式组成的群关于 C 上全体恰当

的微分 1-形式的商群。

设 λ 是 C 上的闭的微分1-形式。在上一节命题 2.4 中我们曾定义过 $H_1(C,\mathbf{Z})$ 上的线性函数 $\eta_\lambda\in H^1(C,\mathbf{C})$。于是有一个同态

$$\eta:\ \{C\ \text{上所有闭的微分 1-形式}\}\to H^1(C,\mathbf{Z}),$$
$$\lambda\mapsto\eta_\lambda.$$

而由上节中的命题 2.5 则进一步告诉我们，η 可以诱导出 $H^1_{DR}(C)$ 到 $H^1(C,\mathbf{Z})$ 的一个单一同态。

此外，上节的命题2.7指出，同态

$$\Omega^1(C)\oplus\overline{\Omega^1(C)}\to H_{DR}(C),$$
$$\omega\oplus\varphi\mapsto\omega+\varphi$$

是单一的。于是我们有一个单一同态的链

$$\Omega^1(C)\oplus\overline{\Omega^1(C)}\ \rightarrowtail\ H^1_{DR}(C)\ \rightarrowtail\ H^1(C,\mathbf{C}).$$

注意到此链两端作为 $\mathbf{C}$ 上的线性空间都是 $2g$ 维的（g 是 C 的亏格），则知这两个同态都是同构。这就给出了下述的 Hodge 定理和 De Rham 定理的证明。

定理3.3(Hodge)　(对于紧Riemann 面C) 我们有

$$\Omega^1(C)\oplus\overline{\Omega^1(C)}\cong H^1_{DR}(C).$$

定理3.4(De Rham)　(对于紧Riemann面C) 我们有

$$H^1_{DR}(C)\cong H^1(C,\mathbf{C}).$$

下面我们再给出一个今后将要用到的结果。

定义3.5　设C是亏格为g的紧Riemann面，$\omega_1,\cdots,\omega_g$是 $\Omega^1(C)$ 的一组基，$\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g}$ 是 $H_1(C,\mathbf{Z})$ 的一组$\mathbf{Z}$-基。我们称下述 $2g$ 个 g 维向量

$$\pi_i=\begin{pmatrix}\int_{\gamma_i}\omega_1\\ \vdots\\ \int_{\gamma_i}\omega_g\end{pmatrix}\qquad(i=1,\cdots,2g)$$

为C的一组**周期向量**，并称矩阵

$$\Omega=(\ \pi_1\ \ \cdots\ \ \pi_{2g}\ )_{g\times 2g}$$

为C的一个**周期矩阵**。

命题3.6 上面给出的$2g$个周期向量是$\mathbf{R}$线性无关的。

证明 用反证法。假若$\pi_1,\cdots,\pi_{2g}$为$\mathbf{R}$线性相关，则存在不全为零的实数$a_1,\cdots,a_{2g}$，使得

$$a_1\pi_1+\cdots+a_{2g}\pi_{2g}=0. \tag{3.1}$$

将此式取复共轭，有

$$a_1\bar{\pi}_1+\cdots+a_{2g}\bar{\pi}_{2g}=0, \tag{3.2}$$

其中

$$\bar{\pi}_i=\begin{pmatrix}\int_{\gamma_i}\bar{\omega}_1\\ \vdots\\ \int_{\gamma_i}\bar{\omega}_g\end{pmatrix}\quad(i=1,\cdots,2g).$$

考虑矩阵

$$\Omega^*=\begin{pmatrix}\pi_1 & \cdots & \pi_{2g}\\ \bar{\pi}_1 & \cdots & \bar{\pi}_{2g}\end{pmatrix}_{2g\times 2g}.$$

(3.1)式与(3.2)式意味着Ω^*的$2g$列以$a_1,\cdots,a_{2g}$为系数构成的线性组合等于零，故矩阵Ω^*的秩小于$2g$。所以存在不全为零的复数$\lambda^1,\cdots,\lambda^g,\eta^1,\cdots,\eta^g$，使得$\Omega^*$的各行以它们为系数构成的线性组合也为零，即

$$\int_{\gamma_i}\left(\sum_{j=1}^{g}\lambda^j\omega_j+\sum_{j=1}^{g}\eta^j\bar{\omega}_j\right)=0\quad(i=1,\cdots,2g).$$

令$\omega=\sum_{j=1}^{g}\lambda^j\omega_j$，$\varphi=\sum_{j=1}^{g}\overline{\eta^j}\omega_j$，则

$$\int_{\gamma_i}(\omega+\bar{\varphi})=0\quad(i=1,\cdots,2g).$$

由上节命题2.5及命题2.6，可知$\omega=\varphi=0$。这与$\lambda^1,\cdots,\lambda^g,\eta^1,\cdots,\eta^g$不全为零及$\omega_1,\cdots,\omega_g$线性无关矛盾。▌

§ 4 Riemann 不等式

本节中的两个不等式对于 Riemann-Roch 定理的证明有基本的重要性。

命题4.1(Riemann不等式) 设 C 是亏格为 g 的紧致Riemann面，$D\in \mathrm{Div}(C)$，$\deg D=d$。则

$$l(D)\geqslant d-g+1.$$

证明 如上节中命题2.3的证明一样，我们仍需要从下述基本事实出发：存在全纯映射

$$\pi: C\to C'\subset \boldsymbol{P}^2,$$

使得 C 是 C' 的正则化，这里 C' 是除了 δ 个通常的二重点 $P_1,\cdots,P_\delta$ 之外无其它重点的代数曲线。

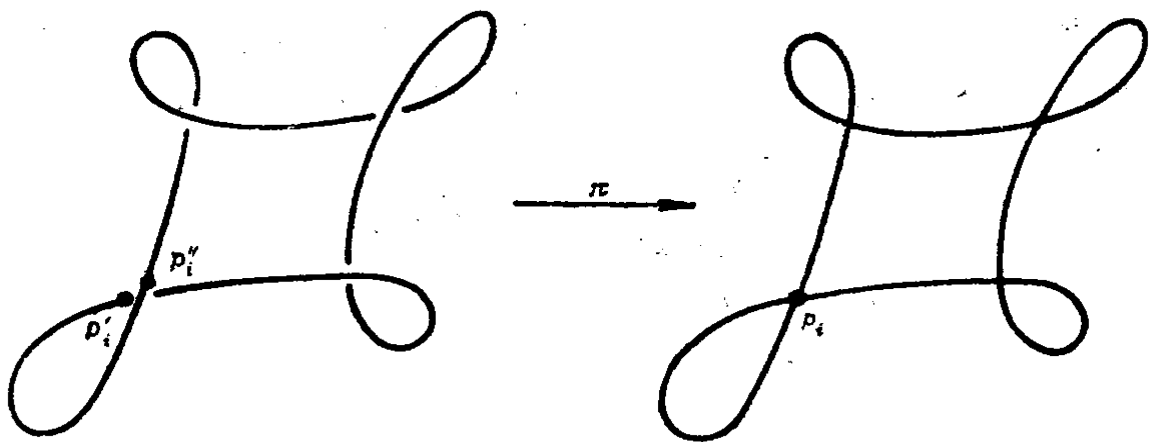


图 3.2

设 $\pi^{-1}(p_i)=p_i'+p_i''(i=1,2,\cdots,\delta)$，记

$$\Delta=\sum_{i=1}^{\delta}(p_i'+p_i'')\in \mathrm{Div}(C).$$

借助 $\boldsymbol{P}^2$ 中的坐标变换，无妨假定 $\pi(D)$ 与 $\pi(\Delta)$ 皆不含无穷远点(见图3.2)。

设C'由方程 $F(\xi^0,\xi^1,\xi^2)=0$ 给出．$\deg F=m$。

设 $D=D'-D''$，其中 $D',D''\geqslant 0$。记

$$\deg D'=d',\qquad \deg D''=d''.$$

以 S^n 表示复系数三元 n 次齐次多项式集合。则 S^n 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间，

$$\dim S^n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

设 $G(\xi^0,\xi^1,\xi^2)\in S^n$，满足下述两个条件：

a) $F\nmid G$;

b) $G\cdot C\geqslant D'+\Delta$，其中$G\cdot C=(\pi^*(G(\xi^0,\xi^1,\xi^2)))_0$。

我们对$G\cdot C$作进一步的说明。$G\cdot C$是Div(C) 中的一个元素。对$p\in C$，记

$$p'=\pi(p)\in C'.$$

p 的邻域在 π 下映成 p' 附近的 C'的一个曲线支，记为 B_p。进行 $\boldsymbol{P}^2$ 上的坐标变换，使 p' 的坐标变为[1,0,0]。设G在此坐标变换下变为 G_p。由于 C' 的重点都是通常的二重点，故在 p' 附近 B_p 的显示方程形如

$$y=a_0x+a_1x^2+\cdots.$$

将此式代入 $G_p(1,x,y)$，得到关于 x 的一个形式幂级数。记此形式幂级数的最低项次数为 $n(p)$，则

$$G\cdot C=\sum_{p\in C}n(p)p.$$

容易看出，上式右端是有限和（这因为 $F\nmid G$，且 F 不可约，故 C' 与$\{G=0\}$没有公共的曲线分量，因此 $C'\cap\{G=0\}$是有限集合，而只有此有限集合在π下的反象 p 才能使$n(p)\neq 0$)，并且$G\cdot C$的定义与前面进行的$\boldsymbol{P}^2$上的坐标变换的选择无关。

我们说，条件$G\cdot C\geqslant D'+\Delta$意味着$G$的系数应当满足 $d'+\delta$ 个线性方程。事实上，设

$$D' = \sum_{i=1}^{\delta}(n_i' p_i' + n_i'' p_i'') + \sum_{j=1}^{r} m_j q_j,$$

其中诸 p_i', p_i'' 与 q_j 均两两不同，$n_i', n_i'', m_j \geqslant 0$。则

$$D' + \Delta = \sum_{i=1}^{\delta}((n_i'+1)p_i' + (n_i''+1)p_i'') + \sum_{j=1}^{r} m_j q_j.$$

对任一确定的 i，$G \cdot C \geqslant (n_i'+1)p_i'$ 等价于 G 的系数应当满足 $n_i'+1$ 个线性方程，即以 $B_{p_i'}$ 的局部显式方程代入 $G_{p'}(1,x,y)$ 后所得到的关于 x 的形式幂级数的 0 次，1 次，…，n_i' 次项系数（依次记为 $l_0', l_1', \cdots, l_{n_i'}'$，它们都是 G 的系数的线性表达式）均为零。同样，$G \cdot C \geqslant (n_i''+1)p_i''$ 等价于 G 的系数应当满足 $n_i''+1$ 个线性方程

$$l_k'' = 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n_i'').$$

但是

$$l_0' = 0 \Longleftrightarrow l_0'' = 0$$

（这是因为 $\pi(p_i') = \pi(p_i'') = p_i$，所以，$l_0' = 0$ 与 $l_0'' = 0$ 都等价于 $G(p_i) = 0$）。故

$$G \cdot C \geqslant (n_i'+1)p_i' + (n_i''+1)p_i''$$

等价于 G 的系数应当满足 $n_i' + n_i'' + 1$ 个线性方程。关于 q_j，由于

$$q_j \overline{\in} \sum_{i=1}^{\delta}(p_i' + p_i''),$$

故 $\pi(q_j)$ 不是 C' 的重点，所以，$G \cdot C \geqslant m_j q_j$ 等价于 G 的系数应当满足 m_j 个线性方程。所以，

$$G \cdot C' \geqslant D' + \Delta$$

等价于 G 的系数应当满足的线性方程的个数为

$$\sum_{i=1}^{\delta}(n_i' + n_i'' + 1) + \sum_{j=1}^{r} m_j = \left(\sum_{i=1}^{\delta}(n_i' + n_i'') + \sum_{j=1}^{r} m_j\right) + \delta$$

$$= \deg(D') + \delta = d' + \delta.$$

现在我们指出，当 n 充分大时，满足条件 a)，b) 的多项式 G 是存在的。事实上，满足条件 b)的多项式 G 的全体组成 S^n 的一个子空间 A，而条件 b) 等价于 G 的系数应当满足 $d'+\delta$ 个线性方程，故

$$\dim A \geqslant \dim S^n - (d'+\delta) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - d' - \delta.$$

但不满足条件 a)的 G 的集合的维数为

$$\dim\{G\in S^n \mid F\mid G\} = \dim S^{n-m} = \frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2).$$

显然，当 n 充分大时，

$$\dim A > \dim S^{n-m},$$

故存在 $G\in S^n$ 同时满足条件 a)和 b)。

取定一个满足条件 a)，b)的 G，令 $E = G\cdot C - D' - \Delta$。置

$$S = \{H\in S^n \mid H\cdot C \geqslant \Delta + E + D''\}.$$

现计算 $\dim S$。由 Bezout 定理

$$(G\cdot C) = \deg G\cdot \deg F = nm,$$

故

$$\deg E = nm - d' - 2\delta.$$

如前边关于 G 所满足的条件 b)的讨论一样，条件

$$H\cdot C \geqslant \Delta + E + D''$$

等价于 H 的系数应当满足 $(\delta + \deg E + \deg D'')$ 个线性方程。而

$$\begin{aligned}\delta + \deg E + \deg D'' &= \delta + (nm - d' - 2\delta) + d'' \\ &= -\delta + nm - d,\end{aligned}$$

故

$$\dim S \geqslant \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + \delta - nm + d.$$

对每个 $H\in S$，定义

$$f_H = \pi^*\left(\frac{H}{G}\bigg|_{C'}\right),$$

则

$$(f_H)+D=(H\cdot C)-(G\cdot C)+D$$
$$\geqslant(\Delta+E+D'')-(E+D'+\Delta)+D=0.$$

故 $f_H\in\mathscr{L}(D)$。于是有映射

$$\alpha:\ S\ \to\ \mathscr{L}(D),$$
$$H\ \mapsto\ f_H.$$

易验证 α 是线性空间的同态。注意到 $f_H=0$ 当且仅当 H 在 C' 上取值为零，亦即 $H=F\cdot Q$（其中 $Q\in S^{n-m}$）。故

$$\ker(\alpha)=F\cdot S^{n-m}.$$

这意味着 α 诱导出一个单一同态

$$\bar{\alpha}:\ S/FS^{n-m}\ \to\ \mathscr{L}(D).$$

故

$$l(D)\geqslant\dim S-\dim S^{n-m}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(n+1)(n+2)+\delta-nm+d$$

$$-\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$$

$$=d-\frac{1}{2}(m^2-3m)+\delta=d-g+1.$$

这里用到了亏格公式。▌

推论4.2 如果 $d\geqslant g$，则

$$l(D)\neq 0;$$

换句话说，如果 $l(D)=0$，则

$$d<g-1.$$

类似于 Riemann 不等式，有

命题4.3 条件同命题4.1，则

$$i(D)\geqslant g-d-1.$$

证明 沿用命题4.1证明中的记号 F,m,D',D'',d',d'' 及 Δ。首先，选择 n 次齐次多项式 $G(\xi^0,\xi^1,\xi^2)$，使 $F\nmid G$，

$$G \cdot C \geqslant D'$$

（这里 n 仍是充分大的自然数。G 的存在性可仿照命题 4.1 的类似证明）。其次，令

$$S_1 = \{H \in S^{n+m-3} \mid H \cdot C \geqslant D' + \Delta + (G \cdot C - D'')\},$$

则

$$\dim S_1 = \frac{1}{2}(n+m-1)(n+m-2) - d' - \delta - nm + d''.$$

对任一 $H \in S_1$，令

$$\varphi_H = \pi^*\left(\frac{H(1,x,y)\mathrm{d}x}{G(1,x,y)F_y(1,x,y)} \bigg|_{C'} \right).$$

在上两节命题 2.3 的证明过程中，曾证明过对 $p \in C'$，

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_y(1,x,y)} \bigg|_p = \infty \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{F_x(1,x,y)} \bigg|_p = \infty$$

$$\Longrightarrow \pi^{-1}(p) \in \Delta,$$

故

$$(\varphi_H) = H \cdot C - G \cdot C + \pi^{-1}\left(\left(\frac{dx}{F_y(1,x,y)}\bigg|_{C'}\right)\right).$$

因此$\varphi_H \in K^1(D)$。这样，我们得到一个同态

$$\beta:\ S_1 \to K^1(D),$$

$$H \mapsto \varphi_H.$$

显然 $\ker \beta = F \cdot S^{n+m-3-m} = F \cdot S^{n-3}$，故

$$i(D) = \dim K^1(D) \geqslant \dim S_1 - \dim(F \cdot S^{n-3})$$

$$= g - d - 1. \quad \blacksquare$$

注意，应用 Riemann 不等式和命题1.4，可以大大简化上面的证明。事实上，设 $\omega \in K^1(C)$，则

$$i(D) = l((\omega) - D) \geqslant \deg((\omega) - D) - g + 1$$

$$= 2g - 2 - d - g + 1 = g - d - 1.$$

推论4.4 如果$d\leqslant g-2$，则$i(D)\neq 0$。换句话说，如果$i(D)=0$，则

$$d\geqslant g-1.$$

§5 Riemann-Roch 定理

有了前四节的准备，我们可以给 Riemann-Roch 定理一个证明了。

定理5.1(Riemann-Roch) 设C是亏格为g的紧 Riemann面，

$$D=\sum_{i=1}^{k}n_i p_i\in \mathrm{Div}(C).$$

则

$$l(D)=d-g+i(D)+1. \tag{5.1}$$

其中$d=\deg D$，$l(D)$与$i(D)$如前(见(1.1)—(1.4)式)。

证明 首先我们证明：如果$D\geqslant 0$，则

$$l(D)\leqslant d-g+i(D)+1. \tag{5.2}$$

这个结果与前一节所得到的两个不等式共同构成证明 Riemann-Roch 定理的基础。

在§1中我们引进过 Laurent 尾的概念。设$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_k)$，其中

$$\eta_i=\frac{a_{in_i}}{z_i^{n_i}}+\cdots+\frac{a_{i1}}{z_i}$$

是p_i附近的Laurent 尾。全体η组成的线性空间与$\mathbf{C}^d$同构。视η为$\mathbf{C}^d$中的向量，考虑映射

$$\mathrm{RES}:\ \mathbf{C}^d\times\Omega^1(C)\to\mathbf{C}$$

$$(\eta,\omega)\longmapsto\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}_{p_i}(\eta_i\omega).$$

易验证这是一个双线性映射，且具有如下性质：

$$\mathrm{RES}(\eta,\omega)=0,\quad \forall \eta\in \mathbf{C}^a \Longleftrightarrow \omega\in \Omega^1(D). \qquad (*)$$

事实上，若 $\omega\in\Omega^1(D)$，则对所有的 $i=1,\cdots,k$，$\eta_i\omega$ 不以 p_i 为极点。故

$$\mathrm{Res}_{p_i}(\eta_i\omega)=0,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}_{p_i}(\eta_i\omega)=0.$$

这就证明了性质（*）的"$\Leftarrow$"部分。为证"$\Rightarrow$"，设 $\omega\in\Omega^1(C)$，在 $p_i(i=1,2,\cdots,k)$附近

$$\omega=b_{i0}z_i^{m_i}+b_{i1}z_i^{m_i+1}+\cdots,$$

其中 $m_i\in\mathbf{Z}$，$b_{i0}\neq 0$。取 p_i 附近的 Laurent 尾

$$\xi_i=(\xi_{i1},\cdots,\xi_{ik}),$$

其中

$$\xi_{ii}=\frac{1}{z_i^{m_i+1}},\qquad \xi_{ij}=0\quad (j\neq i),$$

则有

$$\mathrm{RES}(\xi_i,\omega)=\mathrm{Res}_{p_i}\frac{b_{i0}}{z_i}=b_{i0}\neq 0.$$

因此必定有 $m_i+1>n_i$，即 $m_i\geqslant n_i(i=1,2,\cdots,k)$。故

$$\omega\in\Omega^1(D).$$

现在需要用到线性代数中的一个事实：设 V 与 W 都是 $\mathbf{C}$ 上的线性空间，

$$\dim V=m,\qquad \dim W=n.$$

设有 B：$V\times W\to\mathbf{C}$ 是双线性映射，且具有性质：若 $w\in W$ 使得对所有的 $v\in V$ 都有 $B(v,w)=0$，则 $w=0$（这样的 B 称为对 W 是非退化的）。再设 L 是 V 的子空间，满足条件：$B(L\times W)=0$，则

$$\dim L\leqslant n-m.$$

事实上，设 $\{w_1,\cdots,w_n\}$ 是 W 的一组基，对每个 $w_\alpha(\alpha=1,\cdots,n)$ 可

定义V上的线性函数

$$\lambda_\alpha: V \to \mathbf{C},$$
$$v \mapsto B(v, w_\alpha).$$

令

$$K = \{v \in V \mid \lambda_\alpha(v) = 0, \quad \forall \alpha = 1, \cdots, n\}.$$

则K是V的一个线性子空间。由于$B(L \times W) = 0$，故

$$L \subset K.$$

我们只要证 $\dim K = m - n$，即只要证$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是$\mathbf{C}$ 上线性无关的线性函数。设$a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{C}$，使得

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \lambda_\alpha = 0.$$

则对所有的 $v \in V$，都有

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \lambda_\alpha(v) = 0,$$

即

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha B(v, w_\alpha) = 0.$$

由于B是双线性映射，故

$$B\left(v, \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha w_\alpha\right) = 0.$$

但B对W非退化，所以

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha w_\alpha = 0.$$

而$\{w_1, \cdots, w_n\}$是W的一组基，故

$$a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

这就证明了$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$在$\mathbf{C}$上线性无关，也即证明了我们需要的事实。

前面所证明的性质(*)说明由RES诱导出的双线性映射

$$\mathrm{RES}_1:\ \boldsymbol{C}^d\times\Omega^1(C)/\Omega^1(D)\to\boldsymbol{C}$$

对$\Omega^1(C)/\Omega^1(D)$是非退化的。回想在§1中已说明过的$\mathscr{L}(D)/\boldsymbol{C}$可视为$\boldsymbol{C}^d$的子空间，且由留数定理易知

$$\mathrm{RES}_1(\mathscr{L}(D)/\boldsymbol{C}\times\Omega^1(C)/\Omega^1(D))=0.$$

根据上面刚证明的线性代数的事实，即知

$$\dim(\mathscr{L}(D)/\boldsymbol{C})\leqslant\dim\boldsymbol{C}^d-\dim(\Omega^1(C)/\Omega^1(D)),$$

即

$$l(D)-1\leqslant d-\dim\Omega^1(C)+i(D).$$

由§2中的命题2.1，$\dim\Omega^1(C)=g$，故有

$$l(D)\leqslant d-g+i(D)+1.$$

(5.2)式证完。

下面我们分别四种情形完成 Riemann-Roch 定理的证明。

a) $l(D)\neq0$，$i(D)=0$。

$l(D)\neq0$ 意味着存在$f\in K(C)$，使得

$$(f)+D\geqslant0.$$

令

$$E=(f)+D.$$

则$(f)=E-D$，即$E\sim D$。根据命题1.3，有

$$l(D)=l(E),\qquad i(D)=i(E),\qquad \deg D=\deg E.$$

故对D证明 Riemann-Roch 定理等价于对E进行证明，即无妨设$D\geqslant0$。

此时，一方面(5.2)式成立；另一方面，由 Riemann 不等式又有

$$d-g+i(D)+1=d-g+1\leqslant l(D).$$

故(5.1)式为真。

b) $l(D)\neq0$，$i(D)\neq0$。

同情形 a)，由于$l(D)\neq0$，我们可以假定$D\geqslant0$。所以(5.2)式成立。

由于 $i(D)\neq 0$，故存在 $\omega\in\Omega^1(C)$，使得

$$(\omega)\geqslant D.$$

设 $E=(\omega)-D$，则 $E\geqslant 0$。由命题1.4及(5.2)式，有

$$i(D)=l(E)\leqslant \deg E-g+1+i(E).$$

由 Poincaré-Hopf 公式，有 $\deg(\omega)=2g-2$，故

$$\deg E=\deg(\omega)-\deg D=2g-2-d,$$

再有 $i(E)=l(D)$，故上式变成

$$i(D)\leqslant 2g-2-d-g+1+l(D),$$

即

$$l(D)\geqslant d-g+i(D)+1.$$

此式与(5.2)式结合，即有(5.1)式。

c) $l(D)=0$，$i(D)\neq 0$。

类似于情形 b)，由 $i(D)\neq 0$，可知存在 $\omega\in\Omega^1(C)$，使得

$$(\omega)=D+E,$$

其中 $E\geqslant 0$。由命题1.4，

$$l(E)=i(D)\neq 0,\qquad i(E)=l(D)=0.$$

故可对 E 应用情形 a)中所证过的结果，有

$$l(E)=\deg E-g+i(E)+1.$$

注意到

$$\deg E=\deg(\omega)-\deg D=2g-2-d,$$

将此结果代入上式，并将其中的 $l(E)$，$i(E)$恢复为 $i(D)$，$l(D)$，即得到(5.1)式。

d) $l(D)=0$，$i(D)=0$。

由推论4.2，有 $d\leqslant g-1$；由推论4.4，有 $d\geqslant g-1$。故

$$d=g-1.$$

此即 $l(D)=i(D)=0$ 时的(5.1)式。 ▌

习题5.1 对$C=\boldsymbol{P}^1$，$D>0$，直接证明 Riemann-Roch 定理。

提示 设

$$D = n_1 p_1 + \cdots + n_k p_k,$$

$p_1, \cdots, p_k$ 均不是无穷远点。设 p_i 在 $\boldsymbol{C}$ 中的坐标为 $z_i (i = 1, \cdots k)$。考虑一组函数

$$f_0(z) = 1,$$

$$f_{ij}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z - z_i)^j}, & \text{当} z \neq \infty, \\ 0, & \text{当} z = \infty, \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant k$，$1 \leqslant j \leqslant n_i$。则这组函数构成 $\mathscr{L}(D)$的基。再注意到

$$\dim \Omega^1(C) = g = 0,$$

即有 Riemann-Roch 定理。

习题5.2 对 $C = \boldsymbol{C}/\Lambda$（其中 $\Lambda = \{m_1 w_1 + m_2 w_2 \mid m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}\}$，$w_1$ 和 w_2 为 $\boldsymbol{R}$线性无关的复数），$D > 0$，直接证明 Riemann-Roch 定理。

提示 只要证 $\dim \mathscr{L}(D) = \deg D$。设

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i \quad (n_1, \cdots, n_k > 0).$$

对每个 p_i，取它在投射 φ: $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}/\Lambda$ 下的一个原象 z_i。定义 $\boldsymbol{C}$ 上的半纯函数

$$\mathscr{P}_i(z) = \mathscr{P}(z - z_i) \quad (i = 1, \cdots, k),$$

其中$\mathscr{P}(z)$是 Weierstrass $\mathscr{P}$函数。定义

$$f_{ij} = \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^j \mathscr{P}_i(z)}{\mathrm{d}z^j}$$

$$(i = 1, \cdots, k;\ j = 1, \cdots, n_i - 2).$$

再定义

$$g_i(z) = (z_i - z_{i+1}) \left[\frac{1}{(z - z_i)(z - z_{i+1})} \right.$$

$$+\sum_{w\in\Lambda'}\left(\frac{1}{(z-z_i-w)(z-z_{i+1}-w)}-\frac{1}{w^2}\right)\Big]$$

$$(i=1,2,\cdots,k-1),$$

其中 $\Lambda'=\Lambda\setminus\{O\}$。易见 $\{f_{ij}\}$ 和 $\{g_i\}$ 都有双周期 w_1 和 w_2，故可视为 $\boldsymbol{C}/\Lambda$ 上的函数。观察极点，可知 $f=1$ 和它们组成 $\mathscr{L}(D)$ 的一组基。而这组函数的个数为

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)+(k-1)+1=\sum_{i=1}^{k}n_i=\deg D,$$

故有结论。

习题5.3 试证：如果 $\deg D<0$，则 $l(D)=0$；如果 $\deg D>2g-2$，则 $i(D)=0$。

提示 对任一 $f\in K(C)$，$f\neq 0$，都有

$$\deg(f)=0。$$

再回想 $l(D)$ 的定义，即知

$$\deg D<0\ \Rightarrow\ l(D)=0。$$

对任一 $\varphi\in K^1(C)$，$\deg(\varphi)=2g-2$。由 $i(D)$ 的定义，即知

$$\deg D>2g-2\ \Rightarrow\ i(D)=0。$$

习题5.4 设 C 是亏格为 g 的紧 Riemann 面，$D\in\operatorname{div}(C)$，

$$d=\deg D\geqslant 2g+1$$

（由习题5.3，$i(D)=0$。故 $l(D)=\deg D-g+1=d-g+1$）。设 $\{f_0,f_1,\cdots,f_{d-g}\}$ 是 $\mathscr{L}(D)$ 的一组基。定义映射

$$\varphi:\ C\ \to \boldsymbol{P}^{d-g},$$
$$p\mapsto[f_0(p),\cdots,f_{d-g}(p)]。$$

验证 φ 的定义是合理的，并证明 φ 是单一的，

$$(\varphi_*)_p\neq 0\quad(\forall\, p\in C)$$

（φ_* 表示 φ 的微分）。

提示　$\forall p\in C$，由习题5.3，

$$l(D-p)=l(D)-1 \Rightarrow \mathscr{L}(D-p)\subsetneqq\mathscr{L}(D)$$
$$\Rightarrow (f_0(p),\cdots,f_{d-g}(p))\neq(0,\cdots,0),$$

即φ定义合理。

$\forall p,q\in C$，类似地，有

$$l(D-p-q)=l(D-p)-1 \Rightarrow \mathscr{L}(D-p-q)\subsetneqq\mathscr{L}(D-p)$$
$$\Rightarrow \varphi\text{ 是单的。}$$

$\forall p\in C$，有

$$l(D-2p)=l(D-p)-1 \Rightarrow \mathscr{L}(D-2p)\subsetneqq\mathscr{L}(D-p)$$
$$\Rightarrow (\varphi_*)_p\neq 0.$$

第四章　Riemann-Roch定理的应用

本章将应用 Riemann-Roch 定理研究亏格为 0,1,2,3,4 的紧 Riemann 面以及超椭圆的和非超椭圆的紧 Riemann 面。

§1　亏格为 0 的情形

应用 Riemann-Roch 定理我们很容易证明下述事实：

命题1.1　设 C 是亏格为 0 的紧 Riemann 面，则 $C\cong \boldsymbol{P}^1$。

证明　在 C 上取一点 p。令 $D=p\in \mathrm{Div}(C)$。我们有

$$0\leqslant i(D)\leqslant \dim \Omega^1(C)=g=0.$$

故 $i(D)=0$。由 Riemann-Roch 定理，有

$$l(D)=d-g+i(D)+1=1-0+0+1=2.$$

故$\mathscr{L}(p)$中必有两个线性无关的函数。其中一个可取为常值函数 $f_1=1$。由于 C 上任一全纯函数必和 f_1 线性相关，所以另一个必然是以 p 为一阶极点的半纯函数，设为 f_2。则 $f_2^{-1}(\infty)=p$。由此

$$\deg f_2=\#\{f_2^{-1}(\infty)\}=1.$$

这意味着 f_2 是由 C 到 $\boldsymbol{P}^1$ 的双全纯映射。故

$$C\cong \boldsymbol{P}^1. \quad \blacksquare$$

§2　亏格为 1 的情形

命题2.1　设 C 是亏格为 1 的紧 Riemann 面，则 C 可以表成 $\boldsymbol{P}^2$ 中的一条光滑三次代数曲线。

注记2.2　若 $C=\boldsymbol{C}/\Lambda$，其中 $\Lambda=\{m_1w_1+m_2w_2\,|\,m_1,m_2\in \boldsymbol{Z}\}$，

我们已经证明过在映射

$$C \to \boldsymbol{P}^2,$$
$$[\omega] \mapsto [1, \mathscr{P}(\omega), \mathscr{P}'(\omega)]$$

下表成三次光滑曲线，其中$\mathscr{P}(\omega)$为 Weierstrass $\mathscr{P}$函数。在本节内我们将用一种典型的方法讨论一般的亏格为 1 的紧 Riemann 面。在这个讨论过程中，关于$\boldsymbol{C}/\Lambda$的上述结果将启示我们如何去构造由C到$\boldsymbol{P}^2$的映射。

证明 我们的目的是构造一个由C到$\boldsymbol{P}^2$的全纯的单一映射f，使得$f(C)$是三次光滑代数曲线。

首先我们指出，对任意一个$\omega\in\Omega^1(C)$及任意一点$p\in C$，总有

$$\omega(p)\neq 0.$$

事实上，由 Poincaré-Hopf 公式，有

$$\deg(\omega)=2g-2=2-2=0.$$

所以，如果$\omega(p)=0$，则ω必有极点，与$\omega\in\Omega^1(C)$矛盾。

由此可知，对任一有效因子D，总有$i(D)=0$。

第一步 我们先构造C上的两个半纯函数x和y（它们相应于$C=\boldsymbol{C}/\Lambda$时的$\mathscr{P}$与$\mathscr{P}'$），并由此构造我们所需要的由C到$\boldsymbol{P}$的全纯映射。

取$p\in C$。又取$D=2p\in \mathrm{Div}(C)$。由于$2p>0$，故

$$i(D)=0.$$

由 Riemann-Roch 定理，有

$$l(D)=d-g+i(D)+1=2-1+0+1=2.$$

故$\mathscr{L}(D)$中必有以p为奇点（阶不超过 2）的半纯函数。易知这样的半纯函数必以p为二阶极点。事实上，由 Riemann-Roch 定理知

$$l(p)=1-1+0+1=1,$$

即$\mathscr{L}(p)$中只有常值函数。这也就是说，以p为极点的半纯函数在p点的阶至少为 2。

设 $x \in \mathscr{L}(2p)$，则在 p 点附近，有

$$x = \frac{c_2}{t^2} + \frac{c_1}{t} + h_1(t) ,$$

其中 t 为 p 点附近局部坐标，$t(p) = 0$；$c_1, c_2 \in \mathbf{C}$，$c_2 \neq 0$；$h_1(t)$ 全纯。

适当地改变 p 点附近的局部坐标，可以使 c_1 消失。事实上，设 $\omega \in \Omega^1(C)$，在局部坐标 t 下，$\omega = g(t)\mathrm{d}t$，其中 $g(0) \neq 0$。令

$$z_1 = \int_0^{z_1} g(t)\mathrm{d}t ,$$

则

$$\mathrm{d}z_1 |_{z_1=0} = g(0) \neq 0.$$

这意味着 z_1 可以作为 p 点附近的局部坐标。在此局部坐标下，$\omega = \mathrm{d}z_1$。设

$$x = \frac{\tilde{c}_2}{z_1^2} + \frac{\tilde{c}_1}{z_1} + \tilde{h}(z_1).$$

注意到半纯微分 $x\omega$ 除了 p 之外无其它极点，由留数定理即知，

$$0 = \mathrm{Res}(x\omega) = \tilde{c}_1.$$

所以

$$x = \frac{\tilde{c}_2}{z_1^2} + \tilde{h}(z_1).$$

再改变 p 点附近的局部坐标（令 $z = \tilde{c}_2^{-1/2} z_1$），我们得到

$$x = \frac{1}{z^2} + h(z)$$

（这个 x 就和 $C = \mathbf{C}/\Lambda$ 时的 Weierstrass $\mathscr{P}$ 函数的解析形式很相像了）。

取定 $\omega \in \Omega^1(C)$。令 $y = \frac{\mathrm{d}x}{\omega}$（这个 y 和 $C = \mathbf{C}/\Lambda$ 时的 $\mathscr{P}'$ 很相

像)。

定义映射

$$f: C \to \boldsymbol{P}^2,$$
$$q \mapsto [1, x(q), y(q)]$$
$$(p \mapsto [0,0,1])。$$

f 就是我们所需要的映射。显然 f 是全纯映射。

第二步 现在证明 $f(C)$ 落在 $\boldsymbol{P}^2$ 中的一条三次曲线上。

视 x 为由 C 到 $\boldsymbol{P}^1$ 的全纯映射，则 $x^{-1}(\infty) = 2p$。故

$$\deg x = 2。$$

因此 x 在其分歧点的分歧指数都不超过 2。设 R 为 x 的分歧因子，则 R 中每个点的系数只能是 1。由 Riemann-Herwitz 公式

$$\deg R = 2(\deg x + g - 1) = 2(2+1-1) = 4。$$

故除点 p 之外 x 还有三个分歧点，即

$$R = p_1 + p_2 + p_3 + p,$$

其中 p_1, p_2, p_3, p 两两不同。设

$$x(p_i) = a_i \quad (i = 1,2,3)。$$

则映射 x 的示意图如图4.1。

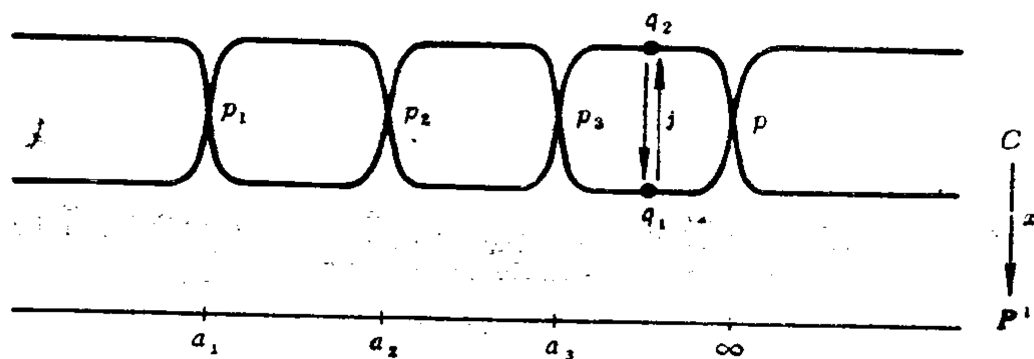


图 4.1

对于一个半纯函数 α，我们以 $(\alpha)_0$ 及 $(\alpha)_\infty$ 表示其零点集合及极点集合（包括重数）。

由于 ω 无零点及极点，而$y = \mathrm{d}x/\omega$，故

$$(y)_0 = (\mathrm{d}x)_0, \qquad (y)_\infty = (\mathrm{d}x)_\infty.$$

因此，$(y)_0$及$(y)_\infty$只可能含有 x 的奇点，即 p_1, p_2, p_3, p。现在我们来计算$(y)_0$及$(y)_\infty$。

设 $z_i(i = 1,2,3)$为 p_i 附近的局部坐标，

$$z_i(p_i) = 0.$$

由于 x 在 p_i 的重数为 2，故

$$x - a_i = z_i^2 h_i(z_i),$$

其中 h_i 为全纯函数，且 $h_i(0) \neq 0$。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x &= 2z_i h_i(z_i)\mathrm{d}z_i + z_i^2 h_i'(z_i)\mathrm{d}z_i \\ &= z_i(2h_i(z_i) + z_i h_i'(z_i))\mathrm{d}z_i.\end{aligned}$$

由于

$$(2h_i(z_i) + z_i h_i'(z_i))|_{z_i=0} = 2h_i(0) \neq 0,$$

故 $\mathrm{d}x$ 以 p_i 为零点。

在 p 点附近取局部坐标如前，有

$$x = \frac{1}{z^2} + h(z).$$

显然 $\mathrm{d}x$ 以 p 为三阶极点。故有

$$(y)_0 = p_1 + p_2 + p_3, \qquad (y)_\infty = 3p, \qquad (y) = p_1 + p_2 + p_3 - 3p.$$

现考虑 $\boldsymbol{P}^1$ 上的半纯函数

$$g(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3).$$

将 g 看作C上的函数(即 x^*g)，则

$$(g)_0 = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3, \qquad (g)_\infty = 6p.$$

这因为在 $p_i(i = 1,2,3)$附近

$$x - a_i = z_i^2 h_i(z_i),$$

故 g 以 p_i 为二阶零点；而在 p 点附近

$$x = \frac{1}{z^2} + h(z),$$

故每个 $(x-a_i)$ 都以 p 为二阶极点。

容易看到，g 的因子恰是 y^2 的因子。所以

$$\left(\frac{y^2}{g}\right)=0,$$

即 y^2/g 是 C 上的全纯函数。而 C 紧，故

$$\frac{y^2}{g}=a\in\boldsymbol{C},$$

其中 $a\neq 0$。我们不妨以 $y/\sqrt{a}$ 代替 y，则有 $y^2=g(x)$。

上面的讨论说明 C 在 f 下的象落在 $\boldsymbol{P}^2$ 中的三次曲线

$$C'=\{[1,x,y]\in\boldsymbol{P}^2\mid y^2-g(x)=0\}\cup\{[0,0,1]\}$$

上。

第三步 下面证明 f 是单一映射。为此定义 C 上的对合映射 j（见图4.1）：

$$j:\ C\to C,$$
$$q_1\mapsto q_2,$$

其中 q_1 和 q_2 为 $\boldsymbol{P}^1$ 中的同一点在 x 下的两个原象。

显然，j^2 为 C 上的恒同映射。

习题2.1 证明 $j\in \mathrm{Aut}(C)$。

考虑 j 在 $K(C)$（或 $K^1(C),\Omega^1(C)$）上诱导的变换 j^*：

$$j^*\alpha=\alpha\circ j,$$

其中 $\alpha\in K(C)$（或 $K^1(C),\Omega^1(C)$）。显然

$$j^*x=x,\qquad j^*(\mathrm{d}x)=\mathrm{d}x.$$

我们断言 $j^*y=-y$。事实上，由于 $y=\mathrm{d}x/\omega$，故

$$j^*y=\frac{j^*(\mathrm{d}x)}{j^*\omega}=\frac{\mathrm{d}x}{j^*\omega}.$$

我们只需证明 $j^*\omega=-\omega$。由于

$$\dim\Omega^1(C)=g=1,$$

所以

$$\Omega^1(C)\cong \mathbf{C}.$$

j^* 可视为 $\mathbf{C}$ 上的线性变换。$j^2=1$ 意味着 $j^{*2}=1$，所以，j^* 的特征值必为 1 或 -1。若 j^* 的特征值为 1，则

$$j^*\omega=\omega.$$

习题2.2 如果 $j^*\omega=\omega$，则 $\boldsymbol{P}^1$ 上存在全纯微分 φ，使得

$$\omega=\varphi\circ x=x^*\varphi.$$

根据这个习题，j^* 的特征值只能是 -1（因为 $\boldsymbol{P}^1$ 上不存在全纯微分）。即 $j^*\omega=-\omega$。这就证明了我们的断言。

现设 $q_1,q_2\in C$，使得 $f(q_1)=f(q_2)$。将证 $q_1=q_2$。若 q_1,q_2 之中有一个为 p，则

$$f(q_1)=f(q_2)=\infty.$$

故 $q_1=q_2=p$。所以以下可假定 q_1,q_2 都不是 p。我们有

$$f(q_1)=[1,x(q_1),y(q_1)],$$
$$f(q_2)=[1,x(q_2),y(q_2)].$$

由于 $f(q_1)=f(q_2)$，故

$$x(q_1)=x(q_2),\qquad y(q_1)=y(q_2).$$

假若 $q_1\neq q_2$，则 $x(q_1)=x(q_2)$ 意味着 $j(q_1)=q_2$，因此

$$j^*y(q_1)=y(q_2).$$

但又有

$$j^*y(q_1)=-y(q_1)=-y(q_2),$$

故

$$y(q_2)=-y(q_2),$$

即有

$$y(q_2)=0.$$

但 $(y)_0=p_1+p_2+p_3$。所以 $q_2=p_1$ 或 p_2 或 p_3。于是

$$q_1=j(q_2)=q_2.$$

这与 $q_1\neq q_2$ 矛盾。这就证明了 f 是单一映射。

第四步 现证

$$f(C)=C'.$$

这里的C'表示第二步的末尾所定义的三次曲线。

我们知道，不可约的平面代数曲线是连通的。显然，C' 的仿射方程

$$y^2 - g(x) = 0$$

之右端是不可约多项式，所以 C' 是不可约代数曲线，因而是连通的。

另一方面，C 的紧致性保证 $f(C)$ 是紧致的，因而 $f(C)$ 是闭的。但 f 的叠纯性又保证 $f(C)$ 在 C' 中是开的．故 $f(C)$ 在 C' 中既开又闭。而 C' 是连通的，所以$f(C) = C'$。

第五步 证明 C' 是光滑的。直接计算可以验证这一点。

C' 的射影方程为

$$F = \xi^0(\xi^2)^2 - (\xi^1 - a_1\xi^0)(\xi^1 - a_2\xi^0)(\xi^1 - a_3\xi^0) = 0.$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \xi^0} = (\xi^2)^2 &+ a_1(\xi^1 - a_2\xi^0)(\xi^1 - a_3\xi^0)\\ &+ a_2(\xi^1 - a_1\xi^0)(\xi^1 - a_3\xi^0)\\ &+ a_3(\xi^1 - a_1\xi^0)(\xi^1 - a_2\xi^0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \xi^1} = &- (\xi^1 - a_2\xi^0)(\xi^1 - a_3\xi^0)\\ &- (\xi^1 - a_1\xi^0)(\xi^1 - a_3\xi^0)\\ &- (\xi^1 - a_1\xi^0)(\xi^1 - a_2\xi^0),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi^2} = 2\xi^0\xi^2.$$

若$\dfrac{\partial F}{\partial \xi^i}(i = 1, 2, 3)$均为零（由Euler公式，也有$F = 0$），则

$$2\xi^0\xi^2 = 0.$$

故

$$\xi^0(\xi^2)^2 = 0.$$

将此式代入$F = 0$，即有

$$(\xi^1 - a_1\xi^0)(\xi^1 - a_2\xi^0)(\xi^1 - a_3\xi^0) = 0.$$

此式左端三个因子至少有一个为零。若只有一个为零，则与

$$\frac{\partial F}{\partial \xi^1}=0,$$

矛盾；若有两个以上为零，则 $\xi^0=\xi^1=0$（这因为 a_1,a_2,a_3 两两不同），代入

$$\frac{\partial F}{\partial \xi^0}=0$$

知 $\xi^2=0$，即有

$$\xi^0=\xi^1=\xi^2=0,$$

而这是不可能的。这就证明了C'的光滑性。

以上五个步骤完成了命题2.1的证明。▌

§3 典范映射

以下几节我们将讨论亏格大于1的紧 Riemann 面。本节进行一些一般性的讨论，以下几节分别进行具体的研究。

我们知道，一般讲来，从一个紧 Riemann 面到 n 维射影空间 $\boldsymbol{P}^n$ 的映射可能有很多种。但是对所有亏格 $g\geqslant 2$ 的紧Riemann面，都存在着一个从它到 $\boldsymbol{P}^{g-1}$ 的特殊形式的全纯映射，这就是所谓的"典范映射"。

定义3·1（典范映射） 设 C 是一个亏格为 $g\geqslant 2$ 的紧Riemann面，$\{\omega_1,\cdots,\omega_g\}$是$\Omega^1(C)$的一组基。则映射

$$\varphi_K:\ C\to \boldsymbol{P}^{g-1},$$
$$p\mapsto[\omega_1(p),\cdots,\omega_g(p)],$$

称作 C 上的**典范映射**。

注记3.2 这定义的确切含意为：如果 z 为 p 点附近的局部坐标，设在 p 点附近

$$\omega_\alpha=f_\alpha(z)\mathrm{d}z\quad(\alpha=1,\cdots,g),$$

则

$$\varphi_K(p) = [f_1(z(p)), \cdots, f_g(z(p))].$$

习题3.1 证明 $\varphi_K(p)$ 的上述定义与 p 点附近的局部坐标选取无关。

注记3.3 应该指出，定义3.1是合理的，也就是说，对任意 $p \in C$，$\omega_1(p), \cdots, \omega_g(p)$ 不全为零。事实上，如果对某个 $p \in C$，$\omega_a(p) = 0$ $(\forall a = 1, \cdots, g)$，则 $\Omega^1(p) = \Omega^1(C)$，故

$$i(p) = \dim \Omega^1(C) = g.$$

由 Riemann-Roch 定理，有

$$l(p) = 1 - g + g + 1 = 2.$$

这意味着 $\mathscr{L}(p)$ 中存在一个非常值的半纯函数 f，$f^{-1}(\infty) = p$，故

$$\deg f = 1.$$

即

$$f: C \to \boldsymbol{P}^1$$

是一个同构。但 C 的亏格 $g > 1$，而 $\boldsymbol{P}^1$ 的亏格为零，矛盾。

典范映射具有以下性质：

命题3.4 φ_K 是非退化的。

证明 假设 φ_K 是退化的，则存在 $\lambda_a \in \boldsymbol{C}$ $(a = 1, 2, \cdots, g)$，λ_a 不全为零，使得对所有的 $p \in \boldsymbol{C}$，都有

$$\sum_{a=1}^{g} \lambda_a \omega_a(p) = 0.$$

于是

$$\sum_{a=1}^{g} \lambda_a \omega_a = 0.$$

这与 $\{\omega_1, \cdots, \omega_g\}$ 是 $\Omega^1(C)$ 的基矛盾。 ▌

命题3.5 如果

$$\varphi_K(p) = \varphi_K(q).$$

其中 $p, q \in C$，$p \neq q$，则存在从 C 到 $\boldsymbol{P}^1$ 的次数为 2 的全纯映射。

证明 $\varphi_K(p)=\varphi_K(q)$意味着

$$\omega_\alpha(p)=\lambda\omega_\alpha(q)\quad(\alpha=1,\cdots,g),$$

其中$0\neq\lambda\in\boldsymbol{C}$。取 $D=p+q$，我们来计算 $i(D)$。

首先，我们有

$$\Omega^1(D)=\Omega^1(p)。$$

事实上，对任一 $\omega\in\Omega^1(C)$，若

$$\omega=\sum_{\alpha=1}^{g}\mu_\alpha\omega_\alpha\quad(\alpha=1,\cdots,g),$$

其中 $\mu_\alpha\in\boldsymbol{C}$，则

$$\omega(p)=0\Longleftrightarrow\sum_{\alpha=1}^{g}\mu_\alpha\omega_\alpha(p)=0$$

$$\Longleftrightarrow\sum_{\alpha=1}^{g}\mu_\alpha\lambda\omega_\alpha(p)=0$$

$$\Longleftrightarrow\omega(q)=0。$$

所以 $\Omega^1(p)=\Omega^1(p+q)=\Omega^1(D)$。为计算 $i(D)$，只要算 $i(p)$。

考虑以 $\lambda_1,\cdots,\lambda_g$ 为变数的线性方程

$$\lambda_1\omega_1(p)+\lambda_2\omega_2(p)+\cdots+\lambda_g\omega_g(p)=0。$$

由注记 3.3 可知 $\omega_\alpha(p)(\alpha=1,\cdots,g)$ 不全为零。故此线性方程有 $g-1$个线性无关的解。因而

$$i(D)=i(p)=g-1。$$

对 $D=p+q$ 应用 Riemann-Roch 定理，有

$$l(D)=2-g+(g-1)+1=2。$$

故存在非常值的亚纯函数 $f\in\mathscr{L}(p+q)$。视 f 为由C到 $\boldsymbol{P}^1$ 的全纯映射，则

$$f^{-1}(\infty)=p+q$$

($f^{-1}(\infty)$ 不能只是一个点 p(或q)，否则有$C\cong\boldsymbol{P}^1$，这与 $g\geqslant 2$ 矛盾)。故

$$\deg f = 2. \quad \blacksquare$$

对于亏格大于 1 的紧Riemann面，根据是否存在由它到$\boldsymbol{P}^1$的二次全纯映射，可将这些曲面分为两大类。

定义3.6 亏格大于 1 的紧 Riemann 面 C 称为**超椭圆的**，如果存在一个从 C 到 $\boldsymbol{P}^1$ 的二次全纯映射；否则称 C 为**非超椭圆的**。

下面我们先考虑非超椭圆的紧 Riemann 面上的典范映射。超椭圆的情形将在下一节中详细讨论。

定义3.7（典范曲线） 设 C 为亏格 $g \geqslant 2$ 的非超椭圆的紧 Riemann 面，

$$\varphi_K: \quad C \to \boldsymbol{P}^{g-1}$$

是典范映射。则

$$\varphi_K(C) \subset \boldsymbol{P}^{g-1}$$

称为**典范曲线**。

在此定义中可将 $g \geqslant 2$改为 $g \geqslant 3$，因为在本章 § 5中将证$g = 2$的紧 Riemann 面都是超椭圆的。

命题3.8 如果 C 是非超椭圆的紧 Riemann 面，则 C 上的典范映射 φ_K 是单一的，而且 $\varphi_K(C)$是光滑的。

证明 命题3.5意味着 φ_K 是单一的。

为证明 $\varphi_K(C)$是光滑的，我们只要证 φ_K 是光滑映射（因为φ_K是单一映射）。

设 $p \in C$。在命题3.5的证明过程中已证过

$$\dim \Omega^1(p) = g - 1.$$

现在我们断言

$$\dim \Omega^1(2p) = g - 2.$$

事实上，设 z 为p点附近的局部坐标，$z(p) = 0$，则在 p 点附近有

$$\omega_\alpha = f_\alpha(z)\mathrm{d}z \quad (\alpha = 1, \cdots, g),$$

这里 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 同以前一样，表示 $\Omega^1(C)$ 的一组基。对任意一

$\omega\in\Omega^1(2p)$，设

$$\omega=\sum_{\alpha=1}^{g}\lambda_\alpha\omega_\alpha,$$

其中$\lambda_\alpha\in\boldsymbol{C}(\alpha=1,\cdots,g)$。则有

$$\begin{cases}\sum_{\alpha=1}^{g}\lambda_\alpha f_\alpha(0)=0,\\ \sum_{\alpha=1}^{g}\lambda_\alpha f'_\alpha(0)=0.\end{cases}$$

故只要证这两个以$\lambda_\alpha(\alpha=1,\cdots,g)$为变数的线性方程线性无关。假若不然，则

$$\Omega^1(p)=\Omega^1(2p).$$

由 Riemann-Roch 定理，有

$$l(2p)=2-g+(g-1)+1=2.$$

因此在$\mathscr{L}(2p)$中存在非常值的半纯函数f以p为二阶极点(f不能以p为一阶极点，否则有$C\cong\boldsymbol{P}^1$，与$g\geqslant2$矛盾)。视f为由C到$\boldsymbol{P}^1$的映射，则

$$\deg f=2,$$

这与C是非超椭圆的相矛盾。这就证明了我们的断言。

所以我们有

$$\dim(\Omega^1(C)/\Omega^1(p))=1,\qquad \dim(\Omega^1(p)/\Omega^1(2p))=1$$

以及

$$\dim\Omega^1(2p)=g-2.$$

因此我们可以选择$\Omega^1(C)$的基$\omega_1,\cdots,\omega_g$，使得在p点附近有

$$\begin{cases}\omega_1=\mathrm{d}z,\\ \omega_2=zh_2(z)\mathrm{d}z,\\ \omega_3=z^2h_3(z)\mathrm{d}z,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \omega_g=z^2h_g(z)\mathrm{d}z,\end{cases}$$

其中 $h_a(a=2,\cdots,g)$ 均为全纯函数，且 $h_2(0)\neq 0$。于是在 p 点附近有

$$\varphi_K(z)=(1,zh_2(z),z^2h_3(z),\cdots,z^2h_g(z)).$$

注意到

$$\left.\frac{\mathrm{d}(zh_2(z))}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0}=h_2(0)\neq 0,$$

即知在 p 点 φ_K 是光滑的。由 p 点的任意性即知 φ_K 是光滑映射。 ∎

§4 超椭圆的紧 Riemann 面

超椭圆的紧 Riemann 面与§2中所讨论的亏格为1的紧 Riemann 面有很多相似之处。

命题4.1 任何超椭圆的紧 Riemann 面都可表成一条次数为 $2g+2$ 的平面代数曲线，其中 g 是此 Riemann 面的亏格。

证明 设 C 是亏格为 g 的超椭圆的紧 Riemann 面。类似亏格为1的情形，我们将构造由 C 到 $\boldsymbol{P}^2$ 的全纯映射 f，使得 $f(C)$ 是一条 $2g+2$ 次代数曲线。

由于 C 是超椭圆的，所以存在由 C 到 $\boldsymbol{P}^1$ 的二次全纯映射

$$x: C\to \boldsymbol{P}^1.$$

设 R 为 x 的分歧因子。根据 Riemann-Herwitz 公式，有

$$\deg R=2(2+g-1)=2g+2.$$

由于 x 是二次的，所以 R 中各点的系数只能全为1，故

$$R=p_1+p_2+\cdots+p_{2g+2},$$

其中 $\{p_i\}$ 为 C 上 $2g+2$ 个互不相同的点。设

$$x^{-1}(\infty)=p+q,$$

$$x(p_i)=a_i\quad(i=1,2,\cdots,2g+2).$$

则 x 的形象如图4.2所示。

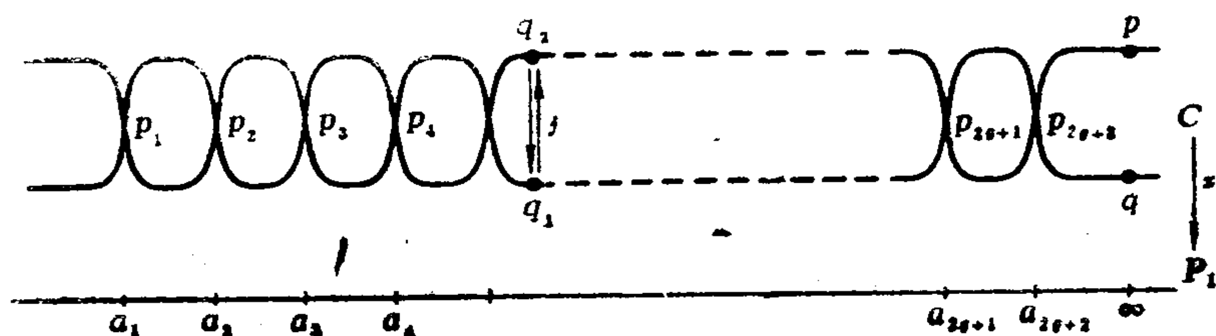


图 4.2

如同 $g=1$ 的情形，我们定义 C 上的对合映射

$$j:\ C \to C,$$

$$q_1 \mapsto q_2;$$

其中 q_1, q_2 为 $\boldsymbol{P}^1$ 中同一个点在 x 下的两个原象。易知

$$j^2=1, \qquad j \in \mathrm{Aut}(C).$$

考虑 j^* 在$\Omega^1(C)$上的作用。由于

$$\Omega^1(C) \cong \boldsymbol{C}^g,$$

故 j^* 可视为 $\boldsymbol{C}^g$ 上的二阶线性变换。j^* 的特征值为 1 或 -1。但如果此特征值为 1，则 C 上的任一全纯微分将诱导出 $\boldsymbol{P}^1$ 上的一个全纯微分，而这是不可能的。故有

$$j^*:\ \Omega^1(C) \to \Omega^1(C),$$

$$\omega \mapsto -\omega.$$

现取

$$D=(g+1)p+(g+1)q \in \mathrm{Div}(C).$$

对任意 $\omega \in \Omega^1(C)$，有

$$\deg(\omega)=2g-2<\deg D.$$

故(ω)不能大于 D，所以 $i(D)=0$。由 Riemann-Roch 定理，有

$$l(D)=(2g+2)-g+1=g+3.$$

因此

$$\mathscr{L}(D) \cong \boldsymbol{C}^{g+3}.$$

由于 $x(p)=x(q)=\infty$，故

$$j(D)=D,$$

所以 j^* 可以视为$\mathscr{L}(D)$上的一个线性变换。但 $j^{*2}=1$，故 j^* 的特征值只有±1。以 $\mathscr{L}(D)^+$和 $\mathscr{L}(D)^-$分别表示 j^* 的属于特征值 1 和 -1的特征子空间，则

$$\mathscr{L}(D)=\mathscr{L}(D)^+\oplus\mathscr{L}(D)^-.$$

注意到$\mathscr{L}(D)^+$中任一半纯函数都可分解为 x 与 $\boldsymbol{P}^1$ 上的一个有理函数(即半纯函数)的复合，且其极点只能是 p 与 q，极点的阶不超过 $g+1$，因此，视 $1,x,x^2,\cdots,x^{g+1}$ 为 C 上的半纯函数，则它们构成$\mathscr{L}(D)^+$ 的一组基。故

$$\dim\mathscr{L}(D)^+=g+2.$$

但 $l(D)=g+3$，故

$$\dim\mathscr{L}(D)^-=1.$$

即存在半纯函数 $y\in\mathscr{L}(D)$，使得

$$j^*(y)=-y.$$

我们断言

$$y^2=cg(x),$$

其中 $c\in\boldsymbol{C}$，$c\neq0$，并且

$$g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2g+2}).$$

事实上，我们只要比较(y^2)与$(g(x))$。由于

$$j^*(y)=-y,\qquad j(p_i)=p_i\quad(i=1,2,\cdots,2g+2),$$

故

$$y(p_i)=-y(p_i).$$

因此

$$y(p_i)=0,$$

故

$$\deg(y)_0\geqslant\deg\sum_{i=1}^{2g+2}p_i=2g+2.$$

但

$$\deg(y)_0=\deg(y)_\infty\leqslant\deg D=2g+2,$$

故

$$\deg(y)_0=\deg(y)_\infty=2g+2.$$

所以

$$(y)_0=\sum_{i=1}^{2g+2}p_i,\qquad (y)_\infty=D. \tag{4.1}$$

再计算$(g(x))$。在p点附近，设z为局部坐标，$z(p)=0$。由于x的局部次数是1，故

$$x=\frac{h(z)}{z},$$

其中h为全纯函数，$h(0)\neq0$。在q点附近亦是如此。故

$$(x-a_i)_\infty=p+q\quad(i=1,2,\cdots,2g+2).$$

所以

$$(g(x))_\infty=(2g+2)p+(2g+2)q=2D. \tag{4.2}$$

在任一p_i附近，设z_i为局部坐标，$z_i(p_i)=0$。则

$$x-a_i=z_i^2h_i(z_i),$$

其中h_i全纯，$h_i(0)\neq0$。故

$$(g(x))_0=\sum_{i=1}^{2g+2}2p_i=2\sum_{i=1}^{2g+2}p_i. \tag{4.3}$$

由(4.1),(4.2) (4.3)式立见

$$(y^2)=(g(x)).$$

所以$y^2/g(x)$是C上的全纯函数，必为常值函数，即有

$$y^2=cg(x),$$

其中$c\in\mathbf{C}$，$c\neq0$。我们以$y/\sqrt{c}$代替y，则得到

$$y^2=g(x).$$

现在定义映射

$$\begin{aligned}f:\ C&\to\mathbf{P}^2,\\ t&\mapsto[1,x(t),y(t)]\\ (p,q&\mapsto[0,0,1]).\end{aligned}$$

令

$$C' = \{y^2 - g(x) = 0\} \cup \{[0,0,1]\},$$

则上面的讨论说明 $f(C) \subset C'$，C' 为 $2g+2$ 次代数曲线。

用§2中对 $g=1$ 的情形所采用的方法容易证明，在 $C\backslash\{p,q\}$ 上 f 是单一的(此结论与 $g=1$ 的情形有所不同)，且

$$f(C) = C'.$$

经直接计算可以发现，C' 在 $\boldsymbol{C}^2 = \{[1,x,y] \in \boldsymbol{P}^2\}$ 上是光滑的，但在点$[0,0,1]$是奇异的(这是 $g \geqslant 2$ 的情形与 $g=1$ 的情形的重要区别)。 ▌

注记4.2 反过来，任意给定 $2g+2$ 个两两不同的复数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2g+2}$，然后令

$$C' = \left\{ y^2 - \prod_{i=1}^{2g+2} (x - a_i) = 0 \right\} \cup [0,0,1] \subset \boldsymbol{P}^2,$$

则C'的正则化C就是一个亏格为 g 的超椭圆的紧 Riemann面。

下面我们借助命题4.1的证明过程中的两个半纯函数x,y，给出亏格为 $g \geqslant 2$ 的超椭圆的紧 Riemann 面上的典范映射以一个优美的分解形式。

命题4.3 $\omega_1 = \dfrac{\mathrm{d}x}{y}$，$\omega_2 = \dfrac{x\mathrm{d}x}{y}$，$\cdots$，$\omega_g = \dfrac{x^{g-1}\mathrm{d}x}{y}$ 构成$\Omega^1(C)$的一组基，这里的 C,x,y 的含意见命题4.1及其证明。

证明 $\omega_1, \omega_2 \cdots, \omega_g$ 在 $\boldsymbol{C}$上线性无关是显然的。故只要证它们都是全纯微分。为此，只要考察$(\omega_\alpha)(\alpha = 1,2,\cdots,g)$。我们有

$$(\omega_\alpha) = (x^{\alpha-1}) + (\mathrm{d}x) - (y). \tag{4.4}$$

先考虑$(x^{\alpha-1})$。设$x^{-1}(0) = p' + q' = D'$，则

$$(x^{\alpha-1})_0 = (\alpha-1)D'.$$

令$D^* = p + q$，则

$$(x^{\alpha-1})_\infty = (\alpha-1)D^*.$$

所以

$$(x^{\alpha-1}) = (\alpha-1)D' - (\alpha-1)D^*. \tag{4.5}$$

再来计算$(\mathrm{d}x)$。这只要考虑 x 的分歧点和极点。设$p_i(i=1, 2, \cdots, 2g+2)$附近的局部坐标为$z_i$,

$$z_i(p_i)=0.$$

则

$$x-a_i=z_i^2 h_i(z_i),$$

其中h_i全纯,$h_i(0)\neq 0$。于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x&=2z_i h_i(z_i)\mathrm{d}z_i+z_i^2 h_i'(z_i)\mathrm{d}z_i\\&=z_i(2h_i(z_i)+z_i h_i'(z_i))\mathrm{d}z_i.\end{aligned}$$

故$\mathrm{d}x$以p_i为一阶零点。

在 p 点附近的局部坐标记为 z,

$$z(p)=0.$$

在$\boldsymbol{P}^1$上无穷远点附近选取通常的局部坐标 u,即有$u=1/x$.我们有

$$u=zh(z),$$

其中$h(z)$全纯,$h(0)\neq 0$。于是

$$\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=-\frac{(h(z)+zh'(z))\mathrm{d}z}{z^2h(z)^2}.$$

由于

$$(h(z)+zh'(z))|_{z=0}\neq 0, \qquad h(z)^2|_{z=0}\neq 0,$$

所以$\mathrm{d}x$以 p 为二阶极点。q 点附近的情况与 p 点相同,故

$$(\mathrm{d}x)=\sum_{i=1}^{2g+2}p_i-2D^*. \tag{4.6}$$

至于(y),在命题(4.1)的证明过程中我们已经计算过(见(4.1)式),

$$(y)=\sum_{i=1}^{2g+2}p_i-(g+1)D^*. \tag{4.7}$$

由(4.4),(4.5),(4.6),(4.7)式即知

$$(\omega)=(a-1)D'-(a-1)D^*+\left(\sum_{i=1}^{2g+2}p_i-2D^*\right)$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{2g+2}p_i-(g+1)D^*\right)$$
$$=(a-1)D'+(g-a)D^*.$$

由于$1\leqslant a\leqslant g$，故$a-1\geqslant 0$，$g-a\geqslant 0$。所以ω_a都是全纯微分。

在命题4.3中给出的$\Omega^1(C)$的这组基下，C上的典范映射具有非常简单的表达形式：

$$\varphi_K:\ C\to \boldsymbol{P}^{g-1},$$
$$t\mapsto[1,x(t),\cdots,x(t)^{g-1}].$$

因此，φ_K可以分解如下图表：

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi_K} & \boldsymbol{P}^{g-1} \\ {\scriptstyle x}\downarrow & \nearrow & \\ \boldsymbol{P}^1 & & \end{array}$$

其中

$$r:\ \boldsymbol{P}^1\to \boldsymbol{P}^{g-1},$$
$$x\mapsto[1,x,\cdots,x^{g-1}]$$

恰是我们所熟知的典范有理映射。

注记4.4 上面的这个分解意味着C被

$$\{(a_1,a_2,\cdots,a_{2g+2})\}$$

在$\boldsymbol{P}^1$的线性同构下划分的等价类唯一决定。这里的"等价类"的确切含意为：对

$$(a_1,a_2,\cdots,a_{2g+2}),\ (b_1,b_2,\cdots,b_{2g+2})\in\boldsymbol{C}^{2g+2},$$

若存在$a,b,c,d\in\boldsymbol{C}$，满足$ad-bc\neq 0$，使得

$$\frac{aa_i+b}{ca_i+d}=b_i\quad(i=1,2,\cdots,2g+2),$$

则称$(a_1, a_2, \cdots, a_{2g+2})$与$(b_1, b_2, \cdots, b_{2g+2})$属于同一等价类。注意到上述的$a, b, c, d$改变同一个倍数并不影响此线性同构，故无妨假定其中一个是固定不变的。因此，我们可以大略地说：亏格为$g\geqslant 2$的超椭圆的紧 Riemann 面的个数为

$$\infty^{2g+2-3} = \infty^{2g-1}$$

（这里应用了注记 4.2 的结果）。

§5 亏格为 2 的情形

命题5.1 亏格为 2 的紧 Riemann 面都是超椭圆的。

证明 设C是亏格为 2 的紧 Riemann 面。根据命题 3.5，只要证明C上的典范映射φ_K不是单一的。

事实上，如果φ_K是单一的，则φ_K的分歧因子为零，故

$$\deg R = 0. \tag{5.1}$$

另一方面，φ_K单一意味着$\deg \varphi_K = 1$。φ_K是由C到P^1的全纯映射，由 Riemann-Herwitz 公式，有

$$\deg R = 2(2+1-1) = 4,$$

与(5.1)式矛盾。▎

采用上一节的记号，即x表示由C到P^1的二次全纯映射，

$$y^2 = \prod_{i=1}^{6}(x - a_i),$$

其中$a_1, \cdots, a_6$为互不相同的复数；

$$\omega_1 = \frac{dx}{y}, \qquad \omega_2 = \frac{x dx}{y},$$

则有

$$\varphi_K:\ C \to P^1,$$
$$t \mapsto [\omega_1, \omega_2] = [1, x(t)].$$

§6 亏格为3的情形

在给出亏格为3的紧 Riemann 面的刻划之前，我们先做些一般性的讨论。

定义6.1(超平面截口) 设C是$\boldsymbol{P}^n$中一条光滑的代数曲线，H是由方程

$$L(\xi)=\sum_{i=0}^{n}l_i\xi^i=0$$

所定义的$\boldsymbol{P}^n$中的一个超平面，且H中不含C的任一不可约分支．则C的**超平面截口**是指依下述步骤所得到的Div(C)中的一个元素：取一个一般的线性函数

$$L'(\xi)=\sum_{i=0}^{n}l'_i\xi^i$$

(所谓$L'(\xi)$是一个一般的线性函数，意为

$$\{L'=0\}\cap C\cap\{L=0\}$$

为空集)，则

$$\frac{L}{L'}\in K(\boldsymbol{P}^n),\qquad \left.\frac{L}{L'}\right|_C\in K(C).$$

C的**超平面截口**(记为$H\cdot C$)即为$\left.\frac{L}{L'}\right|_C$在$C$上的全部零点(重数考虑在内)，即

$$H\cdot C=\left(\left.\frac{L}{L'}\right|_C\right)_0.$$

直观看来，即

$$H\cdot C=C\cap\{L(\xi)=0\}\quad(\text{重数考虑在内}).$$

定义 6.2 (曲线的次数) 设C为$\boldsymbol{P}^n$中的一条光滑曲线，则

称 $\deg(H\cdot C)$ 为 C 的**次数**，记为 $\deg C$。

注记6.3 此定义是合理的，即

$$\deg C=\deg(H\cdot C)$$

与超平面 H 的选择无关。事实上，若再有超平面

$$H_1=\{L_1(\xi)=0\},$$

则

$$\deg(H_1\cdot C)=\deg\left(\frac{L_1}{L'}\bigg|_C\right)_0=\deg\left(\frac{L_1}{L'}\bigg|_C\right)_\infty=\deg\left(\frac{L}{L'}\bigg|_C\right)_\infty$$

$$=\deg\left(\frac{L}{L'}\bigg|_C\right)_0=\deg(H\cdot C).$$

注记6.4 当 $n=2$ 时，H 是 $\boldsymbol{P}^2$ 中不含 C 的不可约曲线分支的直线。由 Bezout 定理，即知这里的曲线次数的定义和以前平面曲线次数的定义是一致的。

在下面的命题中以及以后，我们将把亏格 $g>1$ 的非超椭圆的紧 Riemann 面与它在典范映射下的象——典范曲线等同起来，即认为此曲面是 $\boldsymbol{P}^{g-1}$ 中的一条光滑曲线。这样做的理由是此时的典范映射是单一的(参见命题3.8)。

命题6.5 设 C 是亏格为 g 的典范曲线，则

$$\deg C=2g-2.$$

证明 设 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_g$ 为 $\Omega^1(C)$ 的一组基，则

$$C=\{[\omega_1(p),\cdots,\omega_g(p)]\}.$$

设

$$H=\left\{\sum_{i=0}^{g-1}l_i\xi^i=0\right\},\qquad H'=\left\{\sum_{i=0}^{g-1}l_i'\xi^i=0\right\}.$$

根据超平面截口的定义，有

$$H \cdot C = \left\{ p \in C \,\middle|\, \frac{\sum_{i=0}^{g-1} l_i \xi^i}{\sum_{i=0}^{g-1} l_i' \xi^i} \Bigg|_p = 0 \right\}$$

$$= \left\{ p \in C \,\middle|\, \frac{\sum_{i=0}^{g-1} l_i \omega_i(p)}{\sum_{i=0}^{g-1} l_i' \omega_i(p)} = 0 \right\} = (\omega)_0,$$

其中$\omega = \sum_{i=0}^{g-1} l_i \omega_i$。显然$\omega \in \Omega^1(C)$，故$(\omega)_0 = (\omega)$。所以

$$H \cdot C = (\omega).$$

于是

$$\deg C = \deg (H \cdot C) = \deg (\omega) = 2g - 2. \quad \blacksquare$$

有了上面的准备，我们很容易证明下面的命题。

命题6.6 亏格为 3 的典范曲线是光滑的四次平面代数曲线。

证明 结论中的"光滑性"已证过(见命题3.8)。再由上面的命题，有

$$\deg C = 2g - 2 = 2 \times 3 - 2 = 4. \quad \blacksquare$$

注记6.7 我们可以说，几乎所有的亏格为 3 的紧 Riemann 面都是典范曲线。这可以由下面的讨论来说明。

首先，我们指出几乎所有的四次齐次方程

$$F(\xi^0, \xi^1, \xi^2) = 0$$

给出的平面代数曲线都是光滑的。事实上，以ξ^0, ξ^1, ξ^2为变数的四次齐次方程的各项系数组成一复射影空间，其维数为三元四次单项式的个数减去 1，即

$$\binom{4+3-1}{3-1}-1=14.$$

而这样的代数曲线是奇异的当且仅当以 ξ^0,ξ^1,ξ^2 为变元的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \xi^0}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial \xi^1}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial \xi^2}=0\end{cases}$$

有非零解，所以这些 F 的系数应满足一组代数方程。这些系数组成$\boldsymbol{P}^{14}$的低维子流形，故我们指出的事实是真的。

其次，由于$\boldsymbol{P}^2$ 上的线性同构的矩阵是 3×3 的可逆方阵，这些方阵构成 $\boldsymbol{P}^8$ 的子集合(事实上，几乎等于 $\boldsymbol{P}^8$)。因此，我们可以说，光滑的四次平面代数曲线的个数为$\infty^{14-8}=\infty^6$。

最后，由亏格公式易知，所有的光滑四次平面代数曲线的亏格 g 都等于 3，即

$$g=\frac{1}{2}(d-1)(d-2)-\delta=\frac{1}{2}(4-1)(4-2)-0=3.$$

而其中(亏格为 3 的)超椭圆的紧 Riemann 面至多只有

$$\infty^{2g-1}=\infty^{2\times3-1}=\infty^5$$

(见注记 4.4)，所以亏格为 3 的典范曲线有∞^6 个。这就说明了几乎所有的亏格为 3 的紧 Riemann 面都是典范曲线。

§7 亏格为 4 的情形

为研究亏格为 4 的紧 Riemann 面，我们还需要做些一般性的讨论。

设C为$\boldsymbol{P}^n$中一条光滑的代数曲线。设

$$H=\{\xi^0=0\},$$

取

$$D=H\cdot C\in \mathrm{Div}(C)。$$

我们知道 $\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}(kD)$ 以及 $\boldsymbol{C}[\xi^0,\xi^1,\cdots,\xi^n]$ 都是分次环。设 $F_k(\xi)$ 为 $\boldsymbol{C}[\xi^0,\xi^1,\cdots,\xi^n]$中的 k 次齐次多项式。定义

$$r(F_k(\xi))=\left.\frac{F_k(\xi)}{(\xi^0)^k}\right|_C\in\mathscr{L}(kD)。$$

将 r 进行线性扩张，易验证它保持分次乘法，所以 r 是分次环同态

$$r:\ \boldsymbol{C}[\xi^0,\xi^1,\cdots,\xi^n]\longrightarrow\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}(kD)。$$

若C是典范曲线，则 r 是满映射(这个结果我们在这里不给予证明。读者可以参看 P.Griffiths 著《Principle of Algebraic Geometry》第253页 Noether 定理)。

设C是亏格为 g 的典范曲线。用S^k 表示$\boldsymbol{C}[\xi^0,\xi^1,\cdots,\xi^{g-1}]$中 k 次齐次多项式组成的 Abel 群。沿用上面的记号 r，令

$$r_k=r|_{S^k}。$$

则

$$r_k:\ S^k\longrightarrow\mathscr{L}(kD)$$

是 Abel 群同态。我们有

$$r_k(F_k(\xi))=\left.\frac{F_k(\xi)}{(\xi^0)^k}\right|_C=\frac{F(\omega_1,\cdots,\omega_g)}{\omega_1^k},$$

其中$\omega_1,\cdots,\omega_g$为$\Omega^1(C)$的基。此式右端的含义为：若

$$F_k=\sum_{i_1+\cdots+i_g=k}a_{i_1,\cdots,i_g}\omega_1^{i_1}\cdots\omega_g^{i_g},$$

则

$$\frac{F(\omega_1,\cdots,\omega_g)}{\omega_1^k}=\sum_{i_1+\cdots+i_g=k}a_{i_1,\cdots,i_g}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{\omega_g}{\omega_1}\right)^{i_g}.$$

故 $r_k(F_k(\xi)) \in \mathscr{L}(kD)$，其中$D = (\omega_1)$。

令$I_k = \ker r_k$。由于此时r_k是满射，故

$$\begin{aligned}\dim I_k &= \dim S^k - \dim \mathscr{L}(kD) \\ &= \dim S^k - l(kD),\end{aligned} \tag{7.1}$$

其中的 dim表示作为复数域上的线性空间的维数。

我们断言

$$l(D) = g,$$

$$l(kD) = (2k-1)(g-1) \qquad (k \geqslant 2)。$$

事实上，我们有$i(D) = 1$(这因为，若 $\omega \in \Omega^1(D)$，$\omega \neq 0$，则$(\omega) \geqslant D$，但

$$\deg(\omega) = 2g - 2 = \deg D,$$

故$(\omega) = D = (\omega_1)$，所以$\omega/\omega_1$ 是C上的全纯函数，必为常值函数。因此 ω与ω_1 线性相关)。当 $k \geqslant 2$ 时，

$$i(kD) = 0$$

(这因为$\deg kD = k(2g-2)$，但任一全纯微分的因子的次数为$2g-2$，故 $k \geqslant 2$ 时在$\Omega^1(kD)$中无全纯微分)。再对$k = 1$及$k \geqslant 2$的两种情形应用 Riemann-Roch 定理，即可证实我们的断言为真。

注意到

$$\dim S^k = \binom{k+g-1}{g-1},$$

由(7.1)式就有

$$\dim I_k = \binom{k+g-1}{g-1} - (2k-1)(g-\delta), \tag{7.2}$$

其中

$$\delta = \begin{cases} 0, & 当k = 1, \\ 1, & 当k > 1。\end{cases}$$

有了上面的一般性的讨论，我们可以证明本节的主要结果了。

命题7.1 亏格为4的典范曲线是P^3中一个二次曲面和三次曲面的交。

证明 设C是亏格为$g=4$的典范曲线，则

$$C\subset P^{g-1}=P^3.$$

由(7.1)式，有下列表。

k	$\dim I_k$	$\dim S^k$	$\dim \mathscr{L}(kD)$
1	0	4	4
2	1	10	9
3	5	20	15

所谓一个k次齐次多项式

$$F_k(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)\in I_k,$$

意即

$$\frac{F_k(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)}{\omega_1^k}=0,$$

也就是$F_k(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$在$C$上取值为零。在上表中

$$\dim I_2=1,\qquad \dim I_3=5,$$

所以存在一个二次齐次多项式和五个线性无关的三次齐次多项式在C上取值为零。以$F(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$表示在$C$上取值为零的二次齐次多项式，则$\xi^0F,\xi^1F,\xi^2F,\xi^3F$为四个在$C$上取值为零的线性无关的三次齐次多项式。因此还应有一个与$\{\xi^iF\,|\,i=0,1,2,3\}$线性无关的三次齐次多项式在C上取值为零，记为$G(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$。设

$$Q=\{F(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)=0\},$$
$$V=\{G(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)=0\}.$$

显然$C\subset Q\cap V$。我们欲证$C=Q\cap V$。

首先，我们指出Q是不可约的。事实上，假若Q可约，则存在一个非平凡的分解

$$F(\xi)=L_1(\xi)L_2(\xi).$$

由于$\deg F=2$，故

$$\deg L_1=\deg L_2=1.$$

但F在C上取零值，故L_1与L_2中必有一个(设为L_1)在C上的无穷多个点上取值为零。所以$\frac{1}{\omega_1}L_1(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)$作为$C$上的半纯函数在$C$上有无穷多个零点，而$C$紧，故

$$L_1(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)=0.$$

这说明$L_1\in I_1$。但由前面所列的表知

$$\dim I_1=0,$$

矛盾。

其次，我们来证Q和V沒有公共的曲面分量。如不然，由于Q不可约，此公共曲面分量必为Q。于是

$$V=Q\cup H,$$

其中H为一次曲面，即超平面。令

$$H=\{L(\xi)=0\},$$

其中$\deg L=1$。我们有

$$G(\xi)=F(\xi)L(\xi).$$

这意味着G与$\xi^0F,\xi^1F,\xi^2F,\xi^3F$线性相关，与$G$的选择矛盾。

第三，我们来证明存在一个超平面$H_0\subset \boldsymbol{P}^3$，使得$H_0\cap Q$与$H_0\cap V$沒有公共的曲线分量。这只要证存在$H_0$，使得$H_0\cap Q$不可约且

$$H_0\cap Q\not\subset H_0\cap V.$$

事实上，由于$Q\not\subset V$，故有点$p\in Q$但$p\bar{\in} V$。以Φ表示$\boldsymbol{P}^3$中通过p点的所有超曲面的集合，则

$$H\in\Phi\Rightarrow H\cap Q\not\subset H\cap V.$$

由于 Φ 中超平面方程形如

$$\sum_{i=0}^{3} l_i \xi^i = 0,$$

且这些超平面过点 p，故 Φ 中超平面依赖两个独立的参数，记为 λ, μ（事实上，为寻找 H_0，只需有一个参数 λ 就够了）。对

$$H = H_{\lambda\mu} \in \Phi,$$

令 $C_H = Q \cap H$，则 C_H 是 H 上一条二次曲线。以 $T_{\lambda\mu}$ 表示此二次曲线的矩阵。我们知道 C_H 是可约的，当且仅当 $T_{\lambda\mu}$ 的秩为 1 或 2，即$\det(T_{\lambda\mu}) = 0$。所以我们只要选取 λ_0, μ_0，使得

$$\det\ (T_{\lambda_0 \mu_0}) \neq 0,$$

并以 H_0 表示 λ_0, μ_0 所对应的 Φ 中的超平面，则 H_0 就满足我们的要求。

现在我们来完成命题7.1的证明。依前面的讨论取定 $\boldsymbol{P}^3$ 中的超平面 H_0，即 $H_0 \cap Q$ 与 $H_0 \cap V$ 没有公共的曲线分量。借助$\boldsymbol{P}^3$中的坐标变换，不妨设

$$H_0 = \{\xi^3 = 0\} = \boldsymbol{P}^2,$$

则 $H_0 \cap Q$ 和 $H_0 \cap V$ 分别是 $\boldsymbol{P}^2$ 中的二次、三次曲线。由 Bezout定理，有

$$\begin{aligned} \#((H_0 \cap Q) \cap (H_0 \cap V)) &= \deg(H_0 \cap Q) \cdot \deg(H_0 \cap V) \\ &= 2 \times 3 = 6, \end{aligned}$$

即

$$\#(H_0 \cap (Q \cap V)) = 6.$$

根据曲线次数的定义，就有

$$\deg(Q \cap V) = 6.$$

现设 $Q \cap V = C + C'$。注意到

$$\deg C = 2g - 2 = 2 \times 4 - 2 = 6,$$

故有 $\deg C' = 0$。所以 $Q \cap V = C$。 ▌

第五章　Abel 定理及其应用

§1　Jacobi 簇和 Abel 定理

设 C 是一个亏格为 $g \geqslant 1$ 的紧 Riemann 面。我们知道 $H_1(C, \boldsymbol{Z})$ 是秩为 $2g$ 的自由 Abel 群。选择 $H_1(C, \boldsymbol{Z})$ 的一组典范基 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2g-1}, \gamma_{2g}$，要求

$$\gamma_i \cdot \gamma_{g+i} = 1, \quad \gamma_{g+i} \cdot \gamma_i = -1 \quad (i = 1, \cdots, g),$$

其它的相交数全为零。

设 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 是 $\Omega^1(C)$ 的一组基。对每个 γ_j，定义

$$\pi_j = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_j} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\gamma_j} \omega_g \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^g \quad (j = 1, \cdots, 2g).$$

因为

$$\mathrm{d}\omega_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, g),$$

由 Stokes 定理可知

$$\int_{\gamma_j} \omega_\alpha$$

仅依赖于 γ_j 的同调类，所以这些向量是有确定的意义的。我们称这些向量为**周期向量**，而把矩阵

$$\Pi = (\ \pi_1 \quad \cdots \quad \pi_{2g}\ )_{g \times 2g}$$

称为**周期矩阵**(参见第三章 §2 的末尾)。

在第三章 §2中我们已经证明了下述命题。

命题 1.1　$\pi_1, \cdots, \pi_{2g}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 线性无关的。

根据这命题，我们知道 $\pi_1,\cdots,\pi_{2g}$ 在 $\mathbf{C}$ 中生成一个格

$$\Lambda=\left\{\sum_{j=1}^{2g} m_j\pi_j \mid m_j\in \mathbf{Z}\right\}\subset \mathbf{C}^g.$$

商空间 $\mathbf{C}^g/\Lambda$ 是一个 g 维复环面，记作 $J(C)$。

定义1.2 对于紧 Riemann 面 C，这样作成的 g 维复环面 $J(C)$ 称为 C 的 Jacobi 簇。

有时候，研究紧 Riemann 面的 Jacobi 簇比研究紧 Riemann 面本身要方便些。下面的问题就是一个例子。

用 $K^*(C)$ 表示 $K(C)$ 的非零元素乘法群。我们考虑如下的问题：给定一个 $D\in \mathrm{Div}(C)$，问：是否存在 $f\in K^*(C)$，使得

$$(f)=D?$$

以 $\mathrm{Div}^0(C)$ 表示同态

$$\deg: \mathrm{Div}(C)\to \mathbf{Z},$$
$$D\mapsto \deg D$$

的核。由于

$$\deg(f)=0,$$

所以上述问题的一个必要条件是 $D\in \mathrm{Div}^0(C)$。

本章的主要结果——Abel 定理——将给上述问题以完整的解答。

设 $q\in C$ 是一个固定的点，$\omega\in \Omega^1(C)$ 是一个全纯微分。对于 C 上的一点 p，考虑沿着任意一条从 q 到 p 的道路的积分

$$\int_q^p \omega.$$

显然，这积分模

$$\left\{\sum_{j=1}^{2g} m_j\int_{\gamma_j}\omega \mid m_j\in \mathbf{Z}\right\}$$

是有确定意义的。所以我们可以定义所谓 Abel-Jacobi 映射。

定义1.3 对于取定的点 $q\in C$，Abel-Jacobi 映射

$$u: \mathrm{Div}(C) \to J(C)$$

定义为

$$u(D)=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} n_i \int_q^{p_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} n_i \int_q^{p_i} \omega_g \end{pmatrix},$$

其中 $D=\sum_{i=1}^{k} n_i p_i \in \mathrm{Div}(C)$。

显然 u 是一个同态。特别地，对于

$$D=\sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} q_i \in \mathrm{Div}^0(C),$$

我们有

$$u(D)=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} \int_q^{p_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} \int_q^{p_i} \omega_g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} \int_q^{q_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} \int_q^{q_i} \omega_g \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} \int_{q_i}^{p_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} \int_{q_i}^{p_i} \omega_g \end{pmatrix}.$$

将要给出的 Abel 定理告诉我们，对于 $D\in \mathrm{Div}^0(C)$，存在 $f\in K^*(C)$，使得 $(f)=D$ 的充分必要条件是

$$u(D)=0.$$

实际上，Abel 定理比上面的陈述更强些。

定理1.4(Abel) 同态序列

$$K^*(C) \xrightarrow{(\ )} \mathrm{Div}^0(C) \xrightarrow{u} J(C) \longrightarrow 0$$

是正合的(其中映射“( )”表示取 $K^*(C)$中的半纯函数的因子)，即

$$\mathrm{Im}(\ \ ) = \ker u,$$

而且 u 是一个满映射。

注记1.5 虽然 u 的定义依赖于 $H_1(C,\boldsymbol{Z})$的典范基和 $\Omega^1(C)$的基的选择，但是“$u(D)=0$”和“u 是满映射”这两个事实却与上述基的选择无关。所以对 Abel 定理的证明只要在特别选定的基下进行即可。

通常，Abel 定理还可以叙述为另一种形式。我们称商群

$$\mathrm{Div}^0(C)/\mathrm{Im}(\ \ )$$

为 Picard 簇，记为 Pic(C)。则 Abel 定理可以改述为

定理1.4′ Abel-Jacobi 映射 u 诱导出一个同构

$$\mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\sim} J(C).$$

我们把 Abel 定理的证明分成以下三个命题。

命题1.6 $\mathrm{Im}(\ \ ) \subset \ker u$，即，对任一 $f \in K^*(C)$，记$(f)=D$，那么

$$u(D) = 0.$$

命题1.7 $\ker u \subset \mathrm{Im}(\ \ )$，即，如果 $u(D)=0$，其中 $D \in \mathrm{Div}^0(C)$，那么存在 $f \in K^*(C)$，使得

$$(f) = D.$$

命题1.8 u: $\mathrm{Div}^0(C) \to J(C)$是一个满射。

命题1.8通常也称为 Jacobi 反演定理。

本节将只证明命题1.6。这个证明比较容易一些

命题1.6的证明 设

$$f \in K^*(C).$$

对于$t\in \boldsymbol{P}^1=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$，令

$$D_t=f^{-1}(t)\in \mathrm{Div}(C)。$$

显然

$$D=(f)=f^{-1}(0)-f^{-1}(\infty)=D_0-D_\infty。$$

我们将证明$u(D_t)=$常值$(t\in \boldsymbol{P}^1)$。由此立即得到

$$u(D)=u(D_0)-u(D_\infty)=0。$$

这就证明了命题1.6。

为了证明$u(D_t)=$常值，我们考虑它的微商

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(D_t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\int_q^{p_j(t)}\omega_1\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}\int_q^{p_j(t)}\omega_g\end{pmatrix},$$

其中

$$D_t=\sum_{j=1}^{n}p_j(t),\qquad n=\deg f。$$

对$t_0\in \boldsymbol{P}^1$，如果$f^{-1}(t_0)$不含f的分歧点，那么存在环绕t_0的一个圆盘$\Delta\subset \boldsymbol{P}^1$和分别环绕$p_1(t_0),\cdots,p_n(t_0)$的$n$个圆盘$\Delta_1,\cdots,\Delta_n\subset C$，使得对每个$j(j=1,\cdots,n)$，

$$f:\ \Delta_j\to\Delta$$

都是双全纯映射。这样，我们可以取$z(p)=f(p)$作为Δ_j的局部坐标。设在这个局部坐标下

$$\omega_\alpha=h_{\alpha j}(z)\mathrm{d}z,$$

那么

$$\int_q^{p_j(t)}\omega_\alpha=\int_q^{p_j(t_0)}\omega_\alpha+\int_{p_j(t_0)}^{p_j(t)}\omega_\alpha$$

$$=\int_q^{p_j(t_0)}\omega_\alpha+\int_{t_0}^{t}h_{\alpha j}(z)\mathrm{d}z。$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_q^{p_j(t)}\omega_\alpha = h_{\alpha j}(t). \tag{1.1}$$

另一方面，在$p_j(t)$附近，按照Δ_j上局部坐标的选取，有

$$\frac{\omega_\alpha}{f-t}=\frac{h_{\alpha j}(z)\mathrm{d}z}{z-t},$$

故

$$2\sqrt{-1}\,\pi\,\mathrm{Res}_{p_j(t)}\frac{\omega_\alpha}{f-t}=h_{\alpha j}(t). \tag{1.2}$$

由(1.1)及(1.2)式，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_q^{p_j(t)}\omega_\alpha = 2\sqrt{-1}\,\pi\,\mathrm{Res}_{p_j(t)}\frac{\omega_\alpha}{f-t}.$$

根据留数定理，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=1}^{n}\int_q^{p_j(t)}\omega_\alpha = 2\sqrt{-1}\,\pi\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}_{p_j(t)}\frac{\omega_\alpha}{f-t}=0.$$

用R表示f的分歧点的集合，我们已经证明了除有限集$f(R)$以外，$u(D_t)$关于t是全纯的，而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(D_t)=0.$$

显然，$\boldsymbol{P}^1\backslash f(R)$是连通的，所以在$t\in\boldsymbol{P}^1\backslash f(R)$上我们有

$$u(D_t)=\text{常值}.$$

根据 Riemann 扩张定理，就有

$$u(D_t)=\text{常值}\quad(t\in\boldsymbol{P}^1). \quad ▌$$

§2 第三类微分

从这一节开始，我们将着手命题 1.7 的证明。但一直要到下

一节结束时才能完全证明这一命题。

如果

$$D \in \mathrm{Div}^0(C), \qquad u(D) = 0,$$

我们要找一个 $f \in K^*(C)$，使得

$$(f) = D.$$

这是一个存在性的命题，看来证明将是相当困难的。在本节中，我们先进行一些分析，使得这个问题变得容易一些。

设

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i \in \mathrm{Div}^0(C).$$

假如存在 $f \in K^*(C)$，使得 $(f) = D$。我们令

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi} \frac{\mathrm{d}f}{f} \ (\in K^1(C)).$$

显然，φ 必须满足：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & (\varphi)_\infty = \sum_{i=1}^{k} p_i,\ \varphi \text{ 只有单极点;} \\ \text{b)} & \mathrm{Res}_{p_i} \varphi = \dfrac{n_i}{2\sqrt{-1}\,\pi},\ \text{其中 } n_i \in \boldsymbol{Z}; \\ \text{c)} & \int_{\gamma_i} \varphi \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

(2.1)式中 c)成立的原因是

$$\int_{\gamma_i} \varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi} \int_{\gamma_i} \frac{\mathrm{d}f}{f} = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi} \int_{\gamma_i} \mathrm{d}(\sqrt{-1}\,\arg f) \in \boldsymbol{Z}.$$

反过来，我们可以证明：

命题2.1 如果 $\varphi \in K^1(C)$，满足(2.1)式。设 q 为 C 上一个固定的点。令

$$f(p) = \exp\left(2\sqrt{-1}\,\pi \int_q^p \varphi\right),$$

其中的积分是沿不经过 φ 的极点的任意一条道路进行的。则 f 是 C 上的一个半纯函数，它满足

$$(f)=\sum_{i=1}^{k} n_i p_i = D,$$

这里的 p_i, n_i 如(2.1)式中的 a)，b)所示。

注意：根据留数定理

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = 0,$$

即 $D\in \mathrm{Div}^0(C)$。

证明 任给从 q 到 p 的不经过 φ 的极点的两条道路，以

$$\int_q^p \varphi \quad 和 \quad {}^\backslash\!\int_q^p \varphi$$

分别表示沿这两条道路的积分。由于 φ 满足（2.1）式，所以 $\int_q^p \varphi - {}^\backslash\!\int_q^p \varphi$ 等于一个整数，即 $\int_{\gamma_i} \varphi$ $(i=1,\cdots,2g)$ 与 n_i $(i=1,\cdots,k)$ 的整系数线性组合。故

$$\exp\left(2\sqrt{-1}\,\pi \int_q^p \varphi\right) = \exp\left(2\sqrt{-1}\,\pi\, {}^\backslash\!\int_q^p \varphi\right),$$

即 $f(p)$ 的定义与由 q 到 p 的道路的选择无关。所以 $f(p)$ 是 C 上的一个函数。

由于 φ 满足(2.1)式的 a)，所以除了 $p_i (i=1,\cdots,k)$ 以外 f 在 C 上是全纯的。而在 p_i 附近，设 z 为局部坐标，$z(p_i)=0$，则

$$\varphi(z)=\frac{n_i}{2\sqrt{-1}\,\pi}\frac{\mathrm{d}z}{z}+h(z)\mathrm{d}z,$$

其中 $h(z)$ 是全纯的。在 p_i 的邻域内取定一个点 $p_0 (p_0 \neq p_i)$，设

$$z(p_0)=z_0,$$

则

$$f(z)=\exp\left(2\sqrt{-1}\,\pi\int_{q}^{p}\varphi\right)$$

$$=\exp\left(2\sqrt{-1}\,\pi\left(\int_{q}^{p_0}\varphi+\int_{p_0}^{p}\varphi\right)\right)$$

$$=\exp\left(2\sqrt{-1}\,\pi\left(\int_{q}^{p_0}\varphi+\int_{z_0}^{z}\frac{n_i}{2\sqrt{-1}\,\pi}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{z_0}^{z}h(z)\mathrm{d}z\right)\right)$$

$$=\exp\left(2\sqrt{-1}\,\pi\left(\int_{q}^{p_0}\varphi-\frac{n_i}{2\sqrt{-1}\,\pi}\ln z_0\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n_i}{2\sqrt{-1}\,\pi}\ln z+\int_{z_0}^{z}h(z)\mathrm{d}z\right)\right)$$

$$=cz^{n_i}H(z),$$

其中

$$c=\exp\left(2\sqrt{-1}\,\pi\left(\int_{q}^{p_0}\varphi-\frac{n_i}{2\sqrt{-1}\,\pi}\ln z_0\right)\right)$$

为非零常数，

$$H(z)=\exp\left(2\sqrt{-1}\,\pi\int_{z_0}^{z}h(z)\mathrm{d}z\right)$$

为非零全纯函数。由此即知

$$(f)=\sum_{i=1}^{k}n_ip_i=D。\quad \blacksquare$$

根据这个命题，命题 1.7 的证明就归结为构造一个满足(2.1)式的半纯微分 $\varphi\in K^1(C)$。

定义 2.2 如果 $\varphi\in K^1(C)$ 至多只有单极点，则称 φ 是一个**第三类微分**；对任意的 $p,q\in C$，$p\neq q$，$\varphi=\varphi_{pq}\in K^1(C)$ 被称为

是一个第三类的初等微分，如果

$$(\varphi)_\infty = p + q,$$

并且

$$\operatorname{Res}_p \varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}, \qquad \operatorname{Res}_q \varphi = -\frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}.$$

显然，对于取定的 $p, q \in C$，$p \neq q$，第三类的初等微分 $\varphi = \varphi_{pq}$ 在允许相差一个全纯微分的意义下是唯一确定的。此外，第三类初等微分的线性组合是一个第三类微分。

满足(2.1)式的 φ 是一个第三类微分。为构造这样的微分，我们首先证明一个关于第三类初等微分的存在定理。

定理 2.3 对任意的 $p, q \in C$，$p \neq q$，存在一个第三类初等微分 $\varphi = \varphi_{pq} \in K^1(C)$，使得

$$(\varphi)_\infty = p + q,$$

并且

$$\operatorname{Res}_p \varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}, \qquad \operatorname{Res}_q \varphi = -\frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}.$$

证明 事实上，只须证明存在一个微分 $\varphi \in K^1(C)$，使得

$$(\varphi)_\infty = p + q$$

即可。这因为，若 p 是 φ 的单极点，则

$$\operatorname{Res}_p \varphi \neq 0.$$

所以，用一个适当的复数去乘 φ，就可以得到一个半纯微分 ψ，使

$$\operatorname{Res}_p \psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}.$$

又由留数定理知

$$\operatorname{Res}_p \psi + \operatorname{Res}_q \psi = 0.$$

故

$$\operatorname{Res}_q \psi = -\frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}.$$

这样，ψ 即符合我们的要求。

如果 C 的亏格 $g=0$，问题是简单的。事实上，此时我们可以认为$C=\boldsymbol{P}^1$。选择 $\boldsymbol{P}^1$ 上合适的坐标，使得

$$p=z_0\neq\infty,\qquad q=z_1\neq\infty.$$

令

$$f(z)=\frac{z-z_0}{z-z_1}.$$

容易验证

$$\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}\frac{\mathrm{d}f}{f}=\frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}\left(\frac{1}{z-z_0}-\frac{1}{z-z_1}\right)\mathrm{d}z$$

就符合我们的要求。

下面我们考虑 $g\geqslant 1$ 的情形。

我们再一次利用这样的事实：任意紧 Riemann 面可以作为只具有通常二重点的平面代数曲线的正则化。

设 C' 是一个只具有通常二重点 $p_1,\cdots,p_\delta$ 的平面代数曲线，而

$$\tau:\ C\to C'$$

是其正则化。设

$$\deg C'=n.$$

由于 $g\geqslant 1$，故 $n\geqslant 3$。下面我们分别两种情形证明本命题。

情形一　$\sigma(p)\neq\sigma(q)$。记 $L=\overline{\sigma(p)\sigma(q)}$（即经过 $\sigma(p)$ 与 $\sigma(q)$的直线）。选择适当的坐标系，使得 $\boldsymbol{P}^2$ 上的无穷远直线 L_∞ 不是 C' 的切线，$\sigma(p),\sigma(q),p_1,\cdots,p_\delta$ 都不在 L_∞ 上，点$[0,0,1]$不在 C' 上，并且

$$L_\infty\cap L\cap C'=\varnothing$$

（为此，我们只需在 $\boldsymbol{P}^2$ 上取一条不经过 L 与 C' 的所有交点以及 $\sigma(p),\sigma(q)$，并且与 C' 交于 n 个不同的点的直线作为 L_∞，再取 $L_\infty\backslash C'$ 上的一个点作为 $[0,0,1]$ 即可）。设在此坐标系下，C'的仿射方程为

$$f(x,y)=0,$$

L 的仿射方程为

$$l(x,y)=0.$$

令

$$L\cdot C=(\sigma^*(l))_0\in \mathrm{Div}(C)$$

（参考第三章§4 命题 4.1 的证明中的记号 $G\cdot C$）。由 Bezout 定理，有

$$L\cdot C=p+q+\sum_{\alpha=3}^{n}r_\alpha \tag{2.2}$$

（这里的 $r_\alpha(\alpha=3,\cdots,n)$ 中可能有某几对在 σ 下映成 C' 的重点）。令

$$\Gamma=\sum_{\alpha=3}^{n}r_\alpha+\sum_{i=1}^{\delta}(p_i'+p_i''),$$

其中 $p_i'+p_i''=\sigma^{-1}(p_i)$。以 S^{n-2} 表示 $n-2$ 次三元齐次多项式的集合。令

$$S^{n-2}(-\Gamma)=\{G\in S^{n-2}\mid(\sigma^*(G))_0\geqslant\Gamma\}.$$

类似于第三章§4 命题 4.1 证明中的讨论可知，$(\sigma^*(G))_0\geqslant\Gamma$ 意味着 G 的系数应当满足 $n-2+\delta$ 个线性方程，故

$$\begin{aligned}\dim S^{n-2}(-\Gamma)&\geqslant\dim S^{n-2}-(n-2+\delta)\\&=\frac{1}{2}n(n-1)-n+2-\delta\\&=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta+1\\&=g+1.\end{aligned} \tag{2.3}$$

对任意一个 $G(\xi^0,\xi^1,\xi^2)\in S^{n-2}(-\Gamma)$，我们可以构造 C 上的一个微分

$$\varphi_G(t)=\begin{cases}\sigma^*\left(\dfrac{g(x,y)\mathrm{d}x}{l(x,y)f_y(x,y)}\right), & \text{当 } \sigma(t)\in U_0,\\[2ex] \sigma^*\left(\dfrac{u^n g\left(\dfrac{1}{u},\dfrac{v}{u}\right)\left(-\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)}{u^n l\left(\dfrac{1}{u},\dfrac{v}{u}\right)f_y\left(\dfrac{1}{u},\dfrac{v}{u}\right)}\right), & \text{当 } \sigma(t)\in U_1,\end{cases}$$

其中

$$U_0=\{[1,x,y]\in \boldsymbol{P}^2\},\qquad U_1=\{[u,1,v]\in \boldsymbol{P}^2\},$$

$$\sigma(t)=\begin{cases}[1,x,y], & \text{当 } \sigma(t)\in U_0,\\ [u,1,v], & \text{当 } \sigma(t)\in U_1,\end{cases}$$

以及

$$g(x,y)=G[1,x,y].$$

容易看出，φ_G 的极点只可能是 p,q 及无穷远点和 C' 的重点在 σ 下的原象。

若 $t\in C$，使得

$$\sigma(t)=p_i\quad (i=1,\cdots,\delta).$$

注意到 $G\in S^{n-2}(-\Gamma)$，即知 $\varphi_G(t)<\infty$，即这样的 t 不是 φ_G 的极点。

若 $t\in C$，使得 $\sigma(t)$ 是 $\boldsymbol{P}^2$ 上的无穷远点。由于 $[0,0,1]$ 不在 C' 上，故

$$\sigma(t)=[u,1,v]\in U_1.$$

由于

$$L_\infty\cap L\cap C'=\varnothing,$$

所以 $\sigma(t)$ 不在 L 上，故

$$ul\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)\neq 0.$$

又由于 L_∞ 不是 C' 的切线，并且 L_∞ 上没有 C' 的重点，可知

$$u^{n-1}f_y\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)\neq 0,$$

这就是说 φ_G 也不以这样的 t 为极点。

由上面的讨论可知

$$(\varphi_G)_\infty \leqslant p+q. \tag{2.4}$$

现考虑映射

$$\varphi: \ S^{n-2}(-\Gamma)\to K^1(C),$$
$$G\mapsto \varphi_G.$$

显然这是一个单一同态。由(2.3)式，即知

$$\dim \varphi(S^{n-2}(-\Gamma))\geqslant g+1>\dim \Omega^1(C). \tag{2.5}$$

假若对所有的 $G\in S^{n-2}(-\Gamma)$，φ_G 都不以 p 为极点，由留数定理及(2.4)式可知 q 也不是 φ_G 的极点，所以 $\varphi_G\in\Omega^1(C)$。而这意味着

$$\dim \varphi(S^{n-2}(-\Gamma))\leqslant \dim \Omega^1(C),$$

与 (2.5) 式矛盾。故必有某个 $G\in S^{n-2}(-\Gamma)$，使得 φ_G 以 p 为极点。这就完成了情形一的证明。

情形二 $\sigma(p)=\sigma(q)$。这个情形比情形一简单一些。证明的过程与情形一基本相同。

选择 $\boldsymbol{P}^2$ 上的适当的坐标系，使得 C' 的二重点 $p_1,p_2,\cdots,p_\delta$ 都不在无穷远直线 L_∞ 上，L_∞ 不是 C' 的切线，并且 C' 不过点 $[0,0,1]$。设在此坐标系下 C' 的仿射方程为 $f(x,y)=0$，

$$\deg f=n.$$

$\sigma(p)=\sigma(q)$ 意味着 $\sigma(p)$ 是 C' 的一个二重点。无妨设 $\sigma(p)=p_1$。由于 C 的亏格 $g\geqslant 1$，并且 C' 上至少有一个二重点 p_1，即 $\delta\geqslant 1$。由亏格公式可知 $n\geqslant 4$。

以 S^{n-3} 表示 $n-3$ 次三元齐次多项式的集合。取

$$\Gamma'=\sum_{i=2}^{\delta}\sigma^{-1}(p_i)=\sum_{i=2}^{\delta}(p_i'+p_i'').$$

令

$$S^{n-3}(-\Gamma')=\{G\in S^{n-3}\mid(\sigma^*(G))_0\geqslant\Gamma'\}.$$

易知

$$\begin{aligned}\dim S^{n-3}(-\Gamma')&\geqslant\dim S^{n-3}-(\delta-1)\\&=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta+1\\&=g+1>\dim\Omega^1(C).\end{aligned}\qquad(2.6)$$

对任一 $G\in S^{n-3}(-\Gamma')$，可以构造 C 上的一个微分

$$\varphi_G(t)=\begin{cases}\sigma^*\left(\dfrac{g(x,y)\mathrm{d}x}{f_y(x,y)}\right), & \text{当 } \sigma(t)\in U_0,\\[2ex] \sigma^*\left(\dfrac{u^{n-1}g\left(\dfrac{1}{u},\dfrac{v}{u}\right)\left(-\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)}{u^{n-1}f_y\left(\dfrac{1}{u},\dfrac{v}{u}\right)}\right), & \text{当 } \sigma(t)\in U_1,\end{cases}$$

其中 $U_0,U_1;x,y;u,v$ 以及 g 的含义与情形一相同。

φ_G 的极点只可能是 p,q 以及 C' 上的无穷远点、C' 的重点 $p_2,\cdots,p_\delta$ 在 σ 下的原象。

由于 $G\in S^{n-3}(-\Gamma')$，即

$$(\sigma^*(G))_0\geqslant\Gamma',$$

故 $p_2,\cdots,p_\delta$ 在 σ 下的原象不可能是 φ_G 的极点.

由于 C' 的重点不在 L_∞ 上，且 L_∞ 不是 C' 的切线，可知 C' 上的无穷远点在 σ 下的原象也不能是 φ_G 的极点。故

$$(\varphi_G)_\infty\leqslant p+q.$$

完全照搬情形一中最后的讨论（只是将 $S^{n-2}(-\Gamma)$ 换成这里的 $S^{n-3}(-\Gamma')$），即知存在 $G\in S^{n-3}(-\Gamma')$，使得 φ_G 以 p 为极点。情形二证完。▌

注记 2.4 在定理 2.3 的证明中我们得到了情形一中的

$$\dim S^{n-2}(-\Gamma)\geqslant g+1$$

以及情形二中的

$$\dim S^{n-3}(-\Gamma')\geqslant g+1.$$

实际上，上述两个不等式都是严格的等式。若不然，线性方程

$$\mathrm{Res}_p(\varphi_\sigma)=0$$

将给出 $K^1(C)$ 的维数不小于 $g+1$ 的子空间，而这子空间含于 $\Omega^1(C)$ 中，这与 $\dim \Omega^1(C)=g$ 相矛盾。不过，我们在证明定理 2.3 过程中不需要这个结论。

由于有了定理 2.3，命题 1.7 的证明被大大地推进了一步。事实上，对于任意给定的

$$D=\sum_{i=1}^{k}p_i-\sum_{i=1}^{k}q_i\in \mathrm{Div}^0(C)$$

（p_i（或 q_i）可能重复），我们可以构造一组第三类初等微分 φ_i（$i=1,\cdots,k$），使得

$$(\varphi_i)_\infty=p_i+q_i,$$

且

$$\mathrm{Res}_{p_i}\varphi_i=\frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi},\qquad \mathrm{Res}_{q_i}\varphi_i=-\frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}. \tag{2.7}$$

令

$$\varphi=\varphi_1+\cdots+\varphi_k,$$

则 φ 是满足（2.1）式中的 a)和 b)的第三类微分。显然，φ 加上一个全纯微分以后，仍然满足（2.1）式的 a)和 b)。我们将选择一个合适的全纯微分 ω，使得 $\varphi+\omega$ 还满足（2.1）式的 c)。从而完成命题 1.7 的证明。为了做到这一点，还需要关于积分的一些事实。这将在下一节中进行讨论。

习题 2.1 对于复环面 $C=\mathbf{C}/\Lambda$，构造 $\varphi\in K^1(C)$，使得

$$(\varphi)_\infty=p+q,\qquad \mathrm{Res}_p\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi},$$

$$\mathrm{Res}_q\varphi = -\frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}.$$

提示　这需要用到有关 Weierstrass σ 函数的一些知识(参看 L. V. Ahlfors, Complex Analysis, 273—274 或 S. Lang, Complex Analysis, 265—268)。大致解答如下。

设

$$\Lambda = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbf{Z}\},$$

其中 w_1, w_2 是在 $\mathbf{R}$ 上线性无关的二复数。记 $\Lambda' = \Lambda \backslash \{O\}$。

级数 $\sum\limits_{w \in \Lambda'} \frac{1}{w^3}$ 是收敛的，故根据 Weierstrass 公式无穷乘积

$$\sigma(z) = z \prod_{w \in \Lambda'} \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp\left(\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}\right)$$

作为 z 的函数是整函数。此即 Weierstrass σ 函数。令

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{w \in \Lambda'} \left(\frac{1}{z - w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right).$$

显然，$\zeta(z)$除了格 Λ 上的点以外无其它极点，而在格点 $w \in \Lambda$,

$$\mathrm{Res}_w \zeta(z) = 1.$$

$\zeta(z)$并不是双周期函数。但是它的微商

$$\zeta'(z) = -\mathscr{P}(z)$$

却是一个双周期函数(这里的 $\mathscr{P}(z)$ 就是以前我们多次遇到的 Weierstrass $\mathscr{P}$ 函数)。故

$$\zeta(z + w_j) = \zeta(z) + \eta_j \ (j = 1, 2),$$

其中 η_1, η_2 是常数。于是

$$\zeta(z - p) - \zeta(z - q),$$

是一个双周期函数。容易验证，微分

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}(\zeta(z-p)-\zeta(z-q))dz$$

在复环 $C=\mathbf{C}/\Lambda$ 上是良定义的并且满足我们的要求。

§3 Riemann 双线性关系

设C是一个紧 Riemann 面，$\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g}$ 是C的任一典范同调基的一组代表（即$\gamma_i\cdot\gamma_{g+i}=1$，$\forall i=1,\cdots,g$，其余的 $\gamma_i\cdot\gamma_j$ 均为零。这里$\gamma_i\cdot\gamma_j$ 表示γ_i 和γ_j 的相交数。图 3.1 中的 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g}$ 就给出了这样一组代表）。对 $\omega\in K^1(C)$，定义

$$\pi_i(\omega)=\int_{\gamma_i}\omega \qquad (i=1,\cdots,2g).$$

（显然，$\pi_i(\omega)(i=1,\cdots,2g)$依赖于$C$的典范同调基的选取，但对取定的典范基，它们与典范基的代表选取无关）。下面的定理对 C 的任一典范基都成立。

定理 3.1（Riemann 双线性关系） 对于任意 $\omega,\varphi\in\Omega^1(C)$，总有

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{g}(\pi_i(\omega)\pi_{g+i}(\varphi)-\pi_{g+i}(\omega)\pi_i(\varphi))=0$;

b) $\displaystyle\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{g}(\pi_i(\omega)\overline{\pi_{g+i}(\omega)}-\pi_{g+i}(\omega)\overline{\pi_i(\omega)})>0$.

这个定理还可以表述为下述形式。如果记

$$I_g=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}_{g\times g},\qquad Q=\begin{pmatrix}0 & I_g\\ -I_g & 0\end{pmatrix}_{2g\times 2g},$$

以 Π 表示 $\Omega^1(C)$的一组基在 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g}$下的周期矩阵，则上述定理可改述为

a) $\Pi Q\,{}^t\Pi = 0$;

b) $\sqrt{-1}\,\Pi Q\,{}^t\overline{\Pi}$ 是 Hermite 正定矩阵。

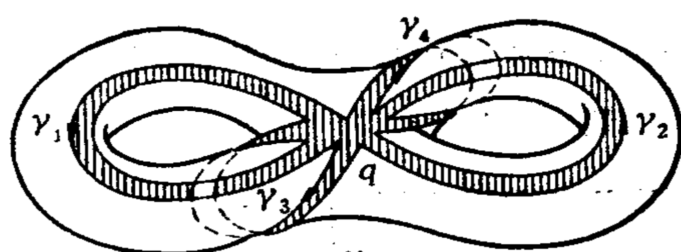
上述的 Q 实际上是 $\Gamma = {}^t(\gamma_1, \cdots, \gamma_{2g})$ 的相交矩阵。即

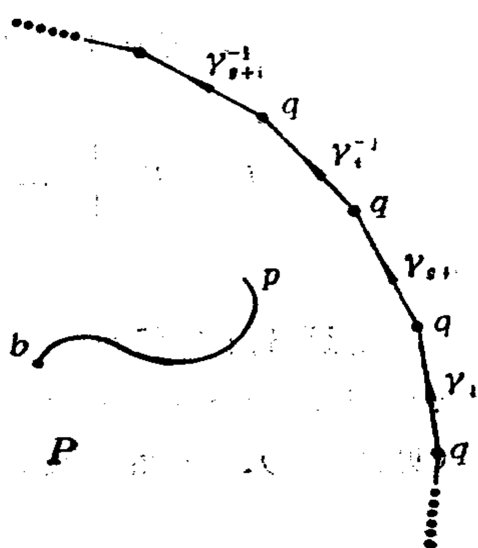
$$\Gamma \cdot {}^t\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \cdot \gamma_1 & \cdots & \gamma_1 \cdot \gamma_{2g} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \gamma_{2g} \cdot \gamma_1 & \cdots & \gamma_{2g} \cdot \gamma_{2g} \end{pmatrix} = Q.$$

定理 3.1 的证明 设 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 是 $\Omega^1(C)$ 的一组基。取定一点 $q \in C$。将图3.1所示的诸 γ_i 都同伦地变为以 q 为起点的道路（见图5.1）。显然，我们只需对图 5.1 的 $\{\gamma_i\}$ 证明本定理。

图 5.1

沿 $\gamma_i\,(i = 1, \cdots, 2g)$ 将曲面 C 割开后，我们得到 C 的规范多边形表示 P。图 5.2 的(a)展示了 $g=2$ 的情形，一般情形如图 5.2 的(b)所示。





(b)

q γ_2 q
γ_4 γ_3^{-1}
q q
γ_2^{-1} P γ_1^{-1}
q q
γ_4^{-1} γ_3
q γ_1 q

(a)

图 5.2

令

$$\Omega = C - \bigcup_{i=1}^{2g} \gamma_i = \text{Int } P.$$

取定一点 $b \in \Omega$。定义

$$u(p) = \int_b^p \omega,$$

其中 p 为 Ω 上的一点，ω 为我们的定理中所考虑的 C 上的全纯微分。由于 Ω 是单连通的，所以 $u(p)$ 是 Ω 上的单值解析函数。将 u 开拓到 P 上。

由于 $\varphi \in \Omega^1(C)$，所以

$$d(u\varphi) = du \wedge \varphi + u d\varphi = \omega \wedge \varphi + 0 = 0.$$

故 $u\varphi$ 是 P 上的一个闭形式。由 Stokes 定理，可知

$$\int_{\partial \Omega} u\varphi = \iint_{\Omega} d(u\varphi) = 0. \tag{3.1}$$

此式左端为

$$\int_{\partial\Omega} u\varphi = \sum_{i=1}^{g}\Big(\int_{\gamma_i} u\varphi + \int_{\gamma_{g+i}} u\varphi + \int_{\gamma_i^{-1}} u\varphi$$

$$+ \int_{\gamma_{g+i}^{-1}} u\varphi\Big). \tag{3.2}$$

现在我们来计算

$$\int_{\gamma_i} u\varphi + \int_{\gamma_i^{-1}} u\varphi.$$

设 p 为 γ_i 上一点，以 p' 表示同一点，但把 p' 视为 γ_i^{-1} 上的点。则

$$\int_{\gamma_i} u\varphi + \int_{\gamma_i^{-1}} u\varphi = \int_{\gamma_i} (u(p) - u(p'))\varphi.$$

由图 5.3 可以看出

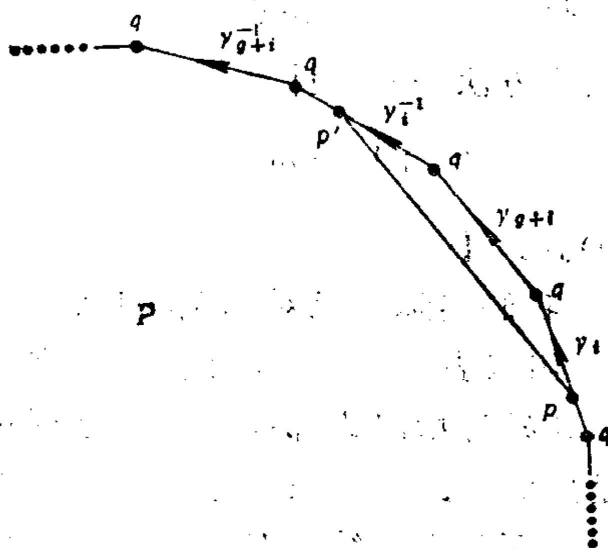


图 5.3

$$u(p) - u(p') = \int_{p'}^{p} \omega$$

$$= \int_{p'}^{q} \omega - \int_{\gamma_{g+i}} \omega + \int_{q}^{p} \omega$$

$$= -\int_{\gamma_{g+i}} \omega = -\pi_{g+i}(\omega).$$

故

$$\int_{\gamma_i} u\varphi + \int_{\gamma_i^{-1}} u\varphi = -\pi_{g+i}(\omega)\int_{\gamma_i}\varphi = -\pi_{g+i}(\omega)\pi_i(\varphi). \quad (3.3)$$

类似地，有

$$\int_{\gamma_{g+i}} u\varphi + \int_{\gamma_{g+i}^{-1}} u\varphi = \pi_i(\omega)\pi_{g+i}(\varphi). \quad (3.4)$$

由(3.1)，(3.2)，(3.3)，(3.4)式就得到本定理中的a)式。

为了证明本定理的b)式，我们只要考虑微分形式$\sqrt{-1}\,u\bar{\omega}$。因为ω全纯，易验证$d\bar{\omega}=0$。所以

$$d(\sqrt{-1}\,u\bar{\omega}) = \sqrt{-1}\,\omega\wedge\bar{\omega}.$$

由此即有

$$\sqrt{-1}\int_{\partial\Omega} u\bar{\omega} = \sqrt{-1}\iint_{\Omega}\omega\wedge\bar{\omega} > 0.$$

同证明a)式时所采用的方法一样，计算

$$\sqrt{-1}\int_{\partial\Omega} u\bar{\omega}$$

的值，就可以证明b)式。∎

注记3.2 以上，我们实际上只对如图3.1所示的特殊选定的C的典范同调基(的一组代表$\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g}$)证明了定理3.1。事实上，正如我们在本节开始时指出的那样，这个定理对于C的任意一个典范同调基都是成立的。为了做到这一点，还需要用到关于辛矩阵的一些知识。下面我们就给出对于C的任一典范同调基的定理3.1的证明。在这个证明中，采用我们在前面提到的定理3.1的另一种表述形式是方便的。

设$\gamma_1',\cdots,\gamma_{2g}'$是$C$的另一典范基的一组代表。则有

$$\Gamma' = \begin{pmatrix}\gamma_1'\\ \vdots\\ \gamma_{2g}'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_{2g}\end{pmatrix} = AF,$$

其中A是$2g\times 2g$阶方阵，其元素皆为整数。设相应于$\omega_1,\cdots,\omega_g$和$\gamma'_1,\cdots,\gamma'_{2g}$的周期矩阵为$\Pi'$，则有

$$\Pi'=\Pi\ {}^tA.$$

由于Γ'也是典范基，故也应有

$$\Gamma'\cdot{}^t\Gamma'=\begin{pmatrix}\gamma'_1\cdot\gamma'_1 & \cdots & \gamma'_1\cdot\gamma'_{2g}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \gamma'_{2g}\cdot\gamma'_1 & \cdots & \gamma'_{2g}\cdot\gamma'_{2g}\end{pmatrix}=Q,$$

即

$$A\Gamma\ {}^t\Gamma\ {}^tA=Q,$$

也就是

$$AQ\ {}^tA=Q. \tag{3.5}$$

满足上式的方阵A称为**辛矩阵**(A中元素属于某域)。

可以证明，任何$2n\times 2n$阶的辛矩阵均可表示为以下四种形式的辛矩阵的乘积(参看华罗庚、万哲先著《典型群》，442—443)：

$$\begin{pmatrix}R & 0\\ 0 & {}^tR^{-1}\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}I & S\\ 0 & I\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ S & I\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}J & I-J\\ J-I & J\end{pmatrix},$$

其中R为$n\times n$阶非奇异矩阵，I为$n\times n$阶单位矩阵，S为$n\times n$阶对称矩阵，J是$n\times n$阶对角矩阵，且满足

$$J^2=J.$$

容易验证，上面四种辛矩阵的转置都是辛矩阵。由此可知，任一辛矩阵的转置还是辛矩阵。

由于A是辛矩阵，故${}^tA$是辛矩阵。由辛矩阵定义，即

$${}^tAQA=Q.$$

这样，我们得到

$$\Pi'Q\ {}^t\Pi'=\Pi\ {}^tAQA\ {}^t\Pi=\Pi Q\ {}^t\Pi=0,$$

以及

$$\sqrt{-1}\Pi'Q\ {}^t\bar{\Pi}'=\sqrt{-1}\Pi\ {}^tAQ\bar{A}\ {}^t\bar{\Pi}=\sqrt{-1}\Pi\ {}^tAQA\ {}^t\bar{\Pi}$$
$$=\sqrt{-1}\Pi Q\ {}^t\bar{\Pi}.$$

这就说明对C的任一典范基，定理3.1也成立。

适当地选择$\Omega^1(C)$的基，可以使周期矩阵Π的形状变得简单些，这对我们今后的讨论是很方便的。事实上，设在$\Omega^1(C)$的某组基下(以及$H_1(C, Z)$的一组典范基下)周期矩阵为Π，我们可以把Π写成如下形式：

$$\Pi_{g\times 2g} = (\ A_{g\times g}\ \ B_{g\times g}\ ).$$

这样，Riemann双线性关系可以写成

a) $A\,{}^tB = B\,{}^tA$；

b) $\sqrt{-1}(A\,{}^t\bar{B} - B\,{}^t\bar{A})$是Hermite正定阵。

这里的b)蕴含着A是非退化的。用${}^tA^{-1}$作为$\Omega^1(C)$的基的演化矩阵，在新的基下，新的周期矩阵形如

$$\Pi' = (\ I_g\ \ Z\ ),$$

其中I_g表示g阶单位方阵，Z为$g\times g$矩阵。这个周期矩阵称为**正规化的周期矩阵**。在正规化周期矩阵下，Riemann双线性关系变得很简单：

a) $Z = {}^tZ$；

b) Z中各元素的虚部组成的矩阵$\mathrm{Im}Z$是(实的)正定矩阵。

在回到命题1.7的证明之前，我们还想对于周期矩阵再说几句话。作为周期矩阵的比较深刻的结果，有

定理3.3(Torelli) 要使两个紧Riemann面C和C'是等价的(即在它们之间存在一个双全纯映射)，必须而且只须它们在适当的典范同调基下的正规化周期矩阵相等。

Torelli定理说明，紧Riemann面的全部信息都包含在它的正规化周期矩阵中了。这个定理的完整的证明超出了本书讨论的范围。在下一节中我们将证明这个定理的一个特殊情形。

容易看出，满足条件$Z = {}^tZ$，且$\mathrm{Im}Z$为正定的g阶方阵Z有$g(g+1)/2$个独立的复参数。但是，可证明，当$g\geqslant 2$时，互不同构的紧Riemann面的复参数只有$3g-3$个。所以，一般讲来，并不是满足上述两个条件的g阶方阵Z都对应着某个紧Riemann

面。事实上，当 $g=1,2,3$ 时，对满足上述两个条件的 Z，

$$(I_g \quad Z)$$

一定是某个亏格为 g 的紧 Riemann 面的一个周期矩阵；而当 $g\geqslant 4$ 时，这个结论是错误的。

Schottky 提出了如下问题：设 Z 满足 Riemann 条件，即 $Z={}^tZ$，$\operatorname{Im}Z$ 为正定的矩阵，Z 还需满足什么条件才能使

$$(I \quad Z)$$

是某紧 Riemann 面的正规化周期矩阵？这个问题尚未解决。

下面我们证明命题1.7。

命题1.7的证明 对于任意一个

$$D=\sum_{i=1}^{k}p_i-\sum_{i=1}^{k}q_i\in \mathrm{Div}^0(C)$$

（p_i（或 q_i）可能有重复），由上一节的讨论，我们知道存在 k 个 C 上的第三类初等微分 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$，其中 $\varphi_i(i=1,\cdots,k)$ 以 p_i 和 q_i 为单极点，且满足(2.7)式。令

$$\varphi=\varphi_1+\cdots+\varphi_k.$$

取定 $H_1(C,\boldsymbol{Z})$ 的如同定理3.1证明中所选定的典范基的代表 $\gamma_j(j=1,\cdots,2g)$。我们当然可以假定所有的 γ_j 都不经过 φ 的极点。设 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ 是 $\Omega^1(C)$ 的一组基，使得相应的周期矩阵正规化为

$$(I \quad Z).$$

令

$$\varphi'=\varphi-\sum_{\alpha=1}^{g}\left(\int_{\gamma_\alpha}\varphi\right)\omega_\alpha.$$

则 φ' 的极点和留数都与 φ 一样，并且对 $j=1,\cdots,g$，有

$$\int_{\gamma_j}\varphi'=\int_{\gamma_j}\varphi-\sum_{\alpha=1}^{g}\left(\int_{\gamma_\alpha}\varphi\right)\int_{\gamma_j}\omega_\alpha$$

$$=\int_{\gamma_j}\varphi-\sum_{\alpha=1}^{g}\left(\int_{\gamma_\alpha}\varphi\right)\pi_j(\omega_\alpha)$$

$$=\int_{\gamma_j}\varphi-\int_{\gamma_j}\varphi=0. \tag{3.6}$$

如同定理3.1的证明中做过的那样，设

$$\Omega=C-\bigcup_{j=1}^{2g}\gamma_j.$$

取 $b\in\Omega$. 对任意一个 $\omega\in\Omega^1(C)$，定义

$$v(p)=\int_b^p\omega\quad(p\in\Omega).$$

v 是 Ω 上的全纯函数。将 v 开拓到规范多边形 P 上去. 考虑 $v\varphi'$，这是 Ω 上的一个半纯微分，其极点与 φ' 的极点相同。根据留数定理，就有

$$2\sqrt{-1}\,\pi\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{Res}_{p_i}(v\varphi')+\mathrm{Res}_{q_i}(v\varphi'))=\int_{\partial\Omega}v\varphi'. \tag{3.7}$$

由于 $\varphi=\varphi_1+\cdots+\varphi_k$，$\varphi_i(i=1,\cdots,k)$满足(2.7)式，而 φ' 的极点及留数都与 φ 一样，故上式的左端为

$$2\sqrt{-1}\,\pi\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{Res}_{p_i}(v\varphi')+\mathrm{Res}_{q_i}(v\varphi'))$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(v(p_i)-v(q_i))=\sum_{i=1}^{k}\int_{q_i}^{p_i}\omega. \tag{3.8}$$

至于右端，用与定理 3.1 的证明中同样的计算可得

$$\int_{\partial\Omega}v\varphi'=\sum_{i=1}^{g}(\pi_i(\omega)\pi_{g+i}(\varphi')-\pi_{g+i}(\omega)\pi_i(\varphi')).$$

由(3.6)式，

$$\pi_j(\varphi')=\int_{\gamma_j}\varphi'=0\quad(j=1,\cdots,g),$$

故

$$\int_{\partial\Omega} v\varphi' = \sum_{i=1}^{g} \pi_i(\omega)\pi_{g+i}(\varphi'). \tag{3.9}$$

特别地，如果我们取 $\omega=\omega_\alpha(\alpha=1,\cdots,g)$，由 (3.7),(3.8)及(3.9)式，就有

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{q_i}^{p_i}\omega_\alpha = \sum_{\beta=1}^{g}\pi_\beta(\omega_\alpha)\pi_{g+\beta}(\varphi').$$

由于在 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ 下的周期矩阵为

$$(\,I \quad Z\,),$$

故 $$\pi_\beta(\omega_\alpha)=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, & 当\ \beta=\alpha\\ 0, & 当\ \beta\neq\alpha\end{cases} \quad (\beta,\alpha=1,\cdots,g).$$

所以

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{q_i}^{p_i}\omega_\alpha = \pi_{g+\alpha}(\varphi'). \tag{3.10}$$

在以上的讨论中我们并没有用到D满足命题1.7的条件，即

$$D\in\ker(u:\ \mathrm{Div}^0(C)\to J(C)).$$

现设D适合这个条件，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\int_{q_i}^{p_i}\omega_\alpha &= \sum_{\beta=1}^{2g} m_\beta\int_{\gamma_\beta} \omega_\alpha\\ &= \sum_{\beta=1}^{g}\left(m_\beta\int_{\gamma_\beta}\omega_\alpha + m_{g+\beta}\int_{\gamma_{g+\beta}}\omega_\alpha\right)\\ &= m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{g} m_{g+\beta}\int_{\gamma_{g+\beta}}\omega_\alpha \quad (\alpha=1,\cdots,g),\end{aligned}$$

其中 $m_\beta(\beta=1,\cdots,2g)$为不依赖于$\alpha$的整数。由 Riemann 双线性关系中的$Z={}^tZ$，有

$$\int_{\gamma_{g+\beta}}\omega_\alpha = \int_{\gamma_{g+\alpha}}\omega_\beta,$$

故
$$\sum_{i=1}^{k}\int_{q_i}^{p_i}\omega_\alpha = m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{g} m_{g+\beta}\int_{\gamma_{g+\alpha}}\omega_\beta.$$
由(3.10)式即有
$$\pi_{g+\alpha}(\varphi') = m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{g} m_{g+\beta}\int_{\gamma_{g+\alpha}}\omega_\beta. \qquad (3.11)$$

令
$$\varphi'' = \varphi' - \sum_{\beta=1}^{g} m_{g+\beta}\omega_\beta.$$
我们断言 φ'' 满足(2.1)式的 a), b), c)。φ'' 满足(2.1) 式的 a), b 是显然的。至于 c)，可验证如下：

对于 $1\leqslant \alpha\leqslant g$，由(3.6)式及
$$\pi_\alpha(\omega_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots, g),$$
有
$$\int_{\gamma_\alpha}\varphi'' = \int_{\gamma_\alpha}\varphi' - \sum_{\beta=1}^{g} m_{g+\beta}\int_{\gamma_\alpha}\omega_\beta$$
$$= -m_{g+\alpha}\in \boldsymbol{Z}.$$
再由(3.11)式，有
$$\int_{\gamma_{g+\alpha}}\varphi'' = \pi_{g+\alpha}(\varphi') - \sum_{\beta=1}^{g} m_{g+\beta}\int_{\gamma_{g+\alpha}}\omega_\beta$$
$$= m_\alpha \in \boldsymbol{Z}.$$
这就证明了我们的断言。再由命题2.1，即得命题1.7。▌

§4 Jacobi 反演定理

本节将在承认一些较深刻的结果的基础上给出所谓Jacobi反演定理的强形式的证明，命题1.8则是这个强形式的简单推论。事实上，即使命题1.8的完整证明本节也难以给出。

我们首先做些一般性的讨论。

设C是一个紧 Riemann 面，其亏格 $g\geqslant 1$。

定义4.1 C的全体次数为d的有效因子 $D=p_1+\cdots+p_d$（诸p_i可能有重复）组成的集合C的第d个对称积，记作$C^{(d)}$。

命题4.2 $C^{(d)}$以一种自然的方式成为一个复流形。

证明 设$C^d=C\times\cdots\times C$是$d$个$C$的直积，它是一个复流形。以$\Sigma_d$表示$\{1,\cdots,d\}$上的置换群。对任一$\sigma\in\Sigma_d$，定义

$$\sigma(p_1,\cdots,p_d)=(p_{\sigma(1)},\cdots,p_{\sigma(d)}),$$

则σ给出了C^d上的一个双全纯映射。故可认为

$$\Sigma_d\subset\mathrm{Aut}(C^d).$$

作为一个拓扑空间，$C^{(d)}$即是商空间C^d/Σ_d。所以$C^{(d)}$是一个紧的 Hausdorff 空间。

下面我们来构造$C^{(d)}$上的局部坐标系。

设

$$D=k_1p_1+\cdots+k_lp_l\in C^{(d)},$$

其中p_i互不相同。对每个p_i，选择它附近的（在C上的）局部全纯坐标系(W_i,z_i)。设

$$\sigma_{ji}(z_i^{(1)},\cdots,z_i^{(k_i)})$$

是定义在$W_i^{k_i}$上的关于这k_i个变量的第j个初等对称多项式$(j=1,2,\cdots,k_i)$。则

$$(\sigma_{11},\cdots,\sigma_{k_11},\cdots,\sigma_{1l},\cdots,\sigma_{k_ll})$$

给出$D\in C^{(d)}$邻近的一个局部全纯坐标。详细的验证留给读者。这样，$C^{(d)}$成为一个复流形。∎

设

$$D\in\mathrm{Div}(C),\quad \deg D=d.$$

我们知道$\mathscr{L}(D)$是复数域$\mathbf{C}$上的向量空间，其维数记为$l(D)$（参见第三章第一节开始）。任给$f\in\mathscr{L}(D)$，令$E=(f)+(D)$，则E是一个d次有效因子，即$E\in C^{(d)}$。又因为对于任一非零常数$\lambda\in\mathbf{C}$，总有

$$(\lambda f) = (f),$$

所以我们有一个映射

$$\alpha: \ \boldsymbol{P}\mathscr{L}(D) \to C^{(d)},$$

$$[f] \mapsto E = (f) + D,$$

其中$[f]$表示f在射影空间$\boldsymbol{P}\mathscr{L}(D)$中所在的等价类。

如果

$$\alpha[f] = \alpha[g],$$

则

$$(f) = (g),$$

即

$$\left(\frac{f}{g}\right) = 0.$$

故f/g是一个非零常数，即

$$[f] = [g].$$

这就是说，α是一个单一映射．借助于这个单一映射，我们可以把$\boldsymbol{P}\mathscr{L}(D)$看作$C^{(d)}$的一个子集。进一步地，我们可以证明$\boldsymbol{P}\mathscr{L}(D)$是$C^{(d)}$的一个子流形，即：

命题4.3 α是一个全纯映射。

证明 设

$$D = \sum_{i=1}^{k} m_i p_i,$$

其中诸p_i互不相同。

设$l(D) = n+1$。选定$\mathscr{L}(D)$的一组基$f_0, f_1, \cdots, f_n$。则$\mathscr{L}(D)$中的任意一个函数都可表成

$$f_\lambda = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + f_n \lambda_n,$$

其中$\lambda_i \in \boldsymbol{C}(i = 0, 1, \cdots, n)$。以$\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n]$作为$[f_\lambda]$在

$$\boldsymbol{P}\mathscr{L}(D) \cong \boldsymbol{P}^n$$

中的齐次坐标。于是，α由

$$\lambda \mapsto E_\lambda = (f_\lambda) + D$$

给出。

对取定的 $\bar{\lambda} = [\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_n]$，我们来证明 α 在 $\bar{\lambda}$ 附近全纯。

设 $(f_{\bar{\lambda}})$ 中出现的与 $p_1, \cdots, p_k$ 不同的点为 $p_{k+1}, \cdots, p_{k+l}$，其中 $l \geqslant 0$。在 C 上分别取 $p_1, \cdots, p_{k+l}$ 的局部坐标邻域，使这些邻域两两不交。以 W 表示这些邻域的并。构造 W 上的半纯函数 g，使得 g 在 $p_{k+1}, \cdots, p_{k+l}$ 的邻域上恒为 1，而在 $p_1, \cdots, p_k$ 的邻域上满足 $(g) = D$。则对 $\bar{\lambda}$ 附近的 λ，有

$$E_\lambda = (f_\lambda g).$$

不失一般性，可设 $\bar{\lambda}_0 \neq 0$。于是在 $\bar{\lambda}$ 附近，有

$$[\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n] = [1, \mu_1, \cdots, \mu_n],$$

其中

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \quad (i = 1, \cdots, n).$$

记

$$f_{(\mu)} = f_0 + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_n f_n.$$

视 $f_{(\mu)} g$ 为 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ 和 W 中的点的函数，则 $f_{(\mu)} g$ 在

$$\bar{\mu} = \left(\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_0}, \cdots, \frac{\bar{\lambda}_n}{\bar{\lambda}_0}\right)$$

和点 $p_i (i = 1, \cdots, k+l)$ 附近是全纯的。这因为在上述区域内 $E_\lambda \geqslant 0$。由下述引理即知 α 是全纯的。▌

引理4.4 设 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ 是 n 维复向量，$z \in \mathbf{C}$。设 $h(\mu, z)$ 是点 $(0, 0)$ 附近的全纯函数，并且 $h(0, z)$ 以 $z = 0$ 为 k 重零点。则存在 $\rho > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，使得

a) 对于满足 $|\mu_i| < \rho (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的任一 $\mu \neq 0$，$h(\mu, z)$ 在 $|z| < \varepsilon$ 中恰有 k 个不同的根 $z_1(\mu), \cdots, z_k(\mu)$；

b) 在 $\{\mu \in \mathbf{C}^n \mid |\mu_i| < \rho, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n\}$ 中，$z_1(\mu), \cdots, z_k(\mu)$

的 k 个初等对称多项式都是 μ 的全纯函数。

这引理的证明与第二章的讨论完全一样（那里的 $n=1$），这里就不再重复了。

为了方便起见，用 $|D|$ 表示 $\alpha(P\mathscr{L}(D))\subset C^{(d)}$。

下面我们考虑 Abel-Jacobi 映射

$$u:\ \mathrm{Div}(C)\to J(C)$$

在 $C^{(d)}$ 上的限制

$$u:\ C^{(d)}\to J(C). \tag{4.1}$$

注意，在本节中，凡提到 Abel-Jacobi 映射时，总认为基点 $q\in C$ 已经指定了。这因为，本节中的结论与基点 q 的选择无关。

设 $D=p_1+p_2+\cdots+p_d\in C^{(d)}$，其中 $p_1,\cdots,p_d$ 两两不同。这样的因子称为 $C^{(d)}$ 中的**一般因子**。显然，(4.1)式的 u 在 D 的一个邻域内是全纯的，u 是局部有界的。根据 Riemann 扩张定理，即知 u 在整个 $C^{(d)}$ 上是全纯的。

定理4.5 $u:\ C^{(d)}\to J(C)$ 的纤维是射影空间．准确地说，对于任一 $D\in C^{(d)}$，有

$$u^{-1}(u(D))=|D|.$$

证明 首先证明 $u^{-1}(u(D))\subset|D|$。设又有 $E\in C^{(d)}$，使得

$$u(E)=u(D),$$

则 $u(E-D)=0$。由命题1.7，存在 $f\in K(C)$，使得

$$(f)=E-D.$$

故 $E=(f)+D$。但 $E\in C^{(d)}$ 意味着 $E\geqslant 0$，因此 $f\in\mathscr{L}(D)$。所以

$$E=\alpha([f])\in\alpha(P\mathscr{L}(D))=|D|.$$

反过来，设 $E\in|D|$，则存在 $f\in\mathscr{L}(D)$，使

$$E=(f)+D.$$

由命题1.6，就有

$$u(E)=u((f))+u(D)=0+u(D)=u(D),$$

此即 $E\in u^{-1}(u(D))$。▌

上面的关于

$$|D|\subset u^{-1}(u(D))$$

的证明依赖于命题1.6。我们可以给出这部分的另一个证明，它不依赖命题1.6，但却需要下面的引理。

引理4.6 从 n 维射影空间 $\boldsymbol{P}^n$ 到 g 维复环 $\boldsymbol{C}^g/\Lambda$ 的任一全纯映射都是常值映射。

证明 我们只要证明 $n=1$ 的情形就足够了。这因为对任意 $p,q\in\boldsymbol{P}^n$，$p\neq q$，总存在一个 $\boldsymbol{P}^1\subset\boldsymbol{P}^n$，使得 $p,q\in\boldsymbol{P}^1$。如果我们证明了 $n=1$ 的情形，则此全纯映射在 p,q 两点取值相等。由 p,q 的任意性，就有我们需要的结论。

现考虑全纯映射

$$\varphi:\ \boldsymbol{P}^1\to\boldsymbol{C}^g/\Lambda.$$

对于 $\boldsymbol{C}^g/\Lambda$ 上的任一全纯微分 ω，$\varphi^*(\omega)$ 是 $\boldsymbol{P}^1$ 上的全纯微分。但

$$\dim\Omega^1(\boldsymbol{P}^1)=0,$$

故 $\varphi^*(\omega)=0$。设 $\boldsymbol{C}^g/\Lambda$ 的局部全纯坐标为 $u_1,\cdots,u_g$（它们是由 $\boldsymbol{C}^g$ 的通常的坐标诱导出来的），则 $du_\alpha\ (\alpha=1,\cdots,g)$ 是 $\boldsymbol{C}^g/\Lambda$ 的全纯微分。所以

$$\varphi^*(du_\alpha)=0,\quad(\alpha=1,\cdots,g).$$

这意味着 $\varphi^*\equiv0$。而 $\boldsymbol{P}^1$ 是连通的，所以 φ 是常值映射。▌

根据这个引理，由于

$$u\circ\alpha:\ \boldsymbol{P}\mathscr{L}(D)\xrightarrow{\alpha}C^{(d)}\xrightarrow{u}\boldsymbol{C}^g/\Lambda$$

是全纯映射，故为常值映射，设 $E\in|D|$。则有 $f\in\mathscr{L}(D)$，使得

$$\alpha([f])=E.$$

由于 $D\geqslant0$，故常值函数 $1\in\mathscr{L}(D)$，且显然 $\alpha([1])=D$。故

$$u(E)=u\circ\alpha([f])=u\circ\alpha([1])=u(D).$$

这就证明了 $E\in u^{-1}(u(D))$。

实际上，引理4.6给出了命题1.6的另一个证明途径（方才给出的关于 $E\in u^{-1}(u(D))$ 的证明已经意味着这一点）。具体地说，设 $(f)=D=D_1-D_2$，其中 $D_1,D_2\geqslant0$。则

$$(f)+D_2=D_1.$$

设$l(D_2)=n+1$，以$P\mathscr{L}(D_2)$代替引理4.6中的P^n，即知

$$u(D_1)=u(D_2)。$$

故

$$u(D)=u(D_1)-u(D_2)=0。$$

当然，上述的讨论并不意味着这里用引理4.6给出的命题1.6的新的证明比我们原来所做的证明来得简单。事实上，这里的证明依赖于a是全纯映射这一事实，而对a的全纯性的证明并不简单。

下面我们讨论Abel-Jacobi映射在$C^{(d)}(d\leqslant g)$上的限制(仍记为u)的微分。设$D\in C^{(d)}$.则u在点D的微分，是由$C^{(d)}$在点D的切空间$T_D(C^{(d)})$到$J(C)$在点$u(D)$的切空间$T_{u(D)}(J(C))$的一个线性映射

$$(u_*)_D:\ T_D(C^{(d)})\to T_{u(D)}(J(C))。$$

现设$D=p_1+\cdots+p_d$是一个一般因子，z_i是C上p_i点附近的局部坐标。则$(z_1,\cdots,z_d)$给出$C^{(d)}$中D点附近的一个局部坐标。设$\omega_a(a=1,\cdots,g)$是$\Omega^1(C)$的一组基，在p_i附近

$$\omega_a=f_{a\,i}(z_i)dz_i,$$

其中$f_{a\,i}(z_i)$全纯。于是，在D附近Abel-Jacobi映射u可以局部地表为

$$u(z_1,\cdots,z_d)=(u_1(z_1,\cdots,z_d),\cdots,u_g(z_1,\cdots,z_d))$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{d}\int_{q}^{z_i}f_{1\,i}(z_i)dz_i,\cdots,\sum_{i=1}^{d}\int_{q}^{z_i}f_{g\,i}(z_i)dz_i\right)。$$

所以$(u_*)_D$可以局部地表为

$$(u_*)_D=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_g}{\partial z_1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial z_d} & \cdots & \dfrac{\partial u_g}{\partial z_d}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} f_{11}(p_1) & \cdots & f_{g1}(p_1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ f_{1d}(p_d) & \cdots & f_{gd}(p_d) \end{pmatrix}.$$

通常，我们用

$$\begin{pmatrix} \omega_1(p_1) & \cdots & \omega_g(p_1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \omega_1(p_d) & \cdots & \omega_g(p_d) \end{pmatrix}$$

来表示上面的$(u_*)_D$。这个矩阵称为 Brill-Noether **矩阵**。

现设C的亏格$g\geqslant 2$。考虑典范映射

$$\varphi_K:\ C \rightarrow P^{g-1},$$
$$p \mapsto [\omega_1(p),\cdots,\omega_g(p)],$$

则$\varphi_K(C)$是P^{g-1}中的一条非退化曲线。设$D=p_1+\cdots+p_d$（诸p_i可能有重复）。以

$$\overline{\varphi_K(D)}=\overline{\varphi_K(p_1),\cdots,\varphi_K(p_d)}$$

表示由$\varphi_K(p_1),\cdots,\varphi_K(p_d)$在$P^{g-1}$中张成的射影子空间。则有：

命题4.7 如果D是一个一般因子，则

$$\text{rank}\ (u_*)_D=\dim\overline{\varphi_K(D)}+1.$$

证明 rank $(u_*)_D$就是$\varphi_K(p_i)$ $(i=1,\cdots,d)$所生成的线性空间的维数，而$\dim\overline{\varphi_K(D)}$是$\varphi_K(p_i)$ $(i=1,\cdots,d)$所张成的射影空间的维数，故有命题4.7。 ▌

我们引进一个术语。当我们研究一族可以局部地用一个复流形或复流形的一个解析子簇参数化的对象时，说“这族里的**通有**的对象都具有某性质”，其含意是不具有这个性质的对象的集合含在某个低维子簇中。

作为命题4.7的推论，有

推论4.8 设$g\geqslant 1$，则$C^{(g)}$上的通有的点D都使得

$$\text{rank}\ (u_*)_D=g.$$

证明 若 $g=1$，显然，

$$(u_*)_p=\omega(p)\neq 0.$$

故总有

$$\operatorname{rank}\,(u_*)_p=1.$$

现设 $g\geqslant 2$。设 $D=p_1+\cdots+p_g\in C^{(g)}$，使得

$$\operatorname{rank}\,(u_*)_D\leqslant g-1.$$

由命题4.7，$\overline{\varphi_K(D)}$的维数不超过$g-2$。即存在$\boldsymbol{P}^{g-1}$的一个$g-2$维线性射影子空间(即$g-2$维超平面)H，使得

$$\varphi_K(p_i)\in H,\qquad \forall\, i=1,\cdots,g.$$

类似于第四章命题3.4的证明，可知H不含$\varphi_K(C)$的任一曲线支，故

$$\#\{\,p\in C\mid\varphi_K(p)\in H\,\}\leqslant n,$$

其中 n 表示曲线$\varphi_K(C)$的次数。所以

$$\#\{\,D\in C^{(g)}\mid\varphi_K(p_i)\in H,\quad\forall\, i=1,\cdots,g\,\}\leqslant n^g.$$

注意到$\boldsymbol{P}^{g-1}$中所有$g-2$维超平面构成一个 $g-1$ 维射影空间，即知$C^{(g)}$中使得$\varphi_K(p_1),\cdots,\varphi_K(p_g)$落在$\boldsymbol{P}^{g-1}$中某个$g-2$维超平面上的

$$D=p_1+\cdots+p_g$$

的集合含于某个$g-1$维子簇之内。但

$$\dim\, C^{(g)}=g,$$

故对通有的$D\in C^{(g)}$，有

$$\operatorname{rank}\,(u_*)_D=g.\quad \blacksquare$$

现在，我们叙述Jacobi反演定理的强形式。

命题4.9 Abel-Jacobi映射在$C^{(g)}$上的限制

$$u:\quad C^{(g)}\to J(C),$$

$$\sum_{i=1}^{g}p_i\mapsto\left(\sum_{i=1}^{g}\int_q^{p_i}\omega_1,\cdots,\sum_{i=1}^{g}\int_q^{p_i}\omega_g\right)$$

是映上的而且对$C^{(g)}$的通有的点是单一的。

为了给出命题4.9的一个证明，我们需要承认下述事实。

事实4.10 设X和Y是同维数的复流形，

$$f: X \to Y$$

是全纯映射，满足下述两个条件：

a）对任一$y \in Y$，$f^{-1}(y)$是连通的；

b）f的微分f_*对通有的$x \in X$都是$T_x(X)$到$T_{f(x)}(Y)$的同构，

则f是映上的而且对X的通有的点是单的。

这个事实的证明路线大致如下：由**真映射定理**可知，$f(X)$是Y的一个解析子簇。设$x_0 \in X$，使得

$$(f_*)_{x_0} \neq 0,$$

则f将x_0的一个开邻域U同胚地映成$f(x_0)$在Y中开邻域V，这就是说$f(X)$含有Y的一个开集。由以上两点可推知f是映上的。另外，对于X上的通有的点x，$f^{-1}(f(x))$是0维的（否则将导致

$$\dim X > \dim Y,$$

与我们的前提矛盾），而$f^{-1}(f(x))$又是连通的，故$f^{-1}(f(x))$是一个点，即有这个事实的第二个结论。详细的证明读者可以参看P. Griffiths等著《Principles of Algebraic Geometry》，235—237。

有了上述事实，我们可以给出：

命题4.9的证明 我们只要说明

$$u: C^{(g)} \to J(C)$$

适合事实4.10的条件。$C^{(g)}$和$J(C)$都是复流形；

$$\dim C^{(g)} = g = \dim J(C);$$

u是全纯映射；对任一$D \in C^{(g)}$，由命题4.5，知

$$u^{-1}(u(D)) = |D| = \alpha(P\mathscr{L}(D)),$$

由于$P\mathscr{L}(D)$连通，α全纯，故$|D|$连通；推论4.8又说明u_*对通有的$D \in C^{(d)}$都是同构。故u满足事实4.10的所有条件。▌

应用命题4.9，命题1.8的证明就非常简单了。

命题1.8的证明 由于u限制在$C^{(g)}$上是满的，故u限制在

$C^{(g)}-gp$上也是满的，其中 p 为C上任意一点。显然

$$C^{(g)}-gp\subset \mathrm{Div}^0(C).$$

故 u 在$\mathrm{Div}^0(C)$上更是满的。▎

Abel 定理的证明到此结束。

作为本节的结尾，我们对映射

$$u: C^{(d)}\to J(C)$$

的 $d=1$ 的情形再说几句话。

首先，此时$C^{(1)}=C$。我们说，这时的u: $C\to J(C)$是一个单射。事实上，若$u(p)=u(q)$，$p\neq q$，则

$$u(p-q)=0.$$

由命题1.7，存在 f: $C\to \boldsymbol{P}^1$，使得$(f)=p-q$，而这意味着

$$C\cong \boldsymbol{P}^1,$$

与 $g\geqslant 1$ 的假定矛盾。又显然，对$p\in C$，

$$(u_*)_p=(\omega_1(p),\cdots,\omega_g(p))\neq 0$$

(其中$\omega_1,\cdots,\omega_g$是$\Omega^1(C)$的基)，所以 u 是C到$u(C)$的一个双全纯映射。

其次，我们说，u_*有些像通常的 Gauss 映射。事实上，由于$J(C)$是加群，故可借$J(C)$的加法的微分把$J(C)$上所有点的切空间都移到$J(C)$上的一个确定的点上去，即把这些切空间都与同一个C^g等同起来。于是$(u_*)_p$就把$T_p(C)$映成C^g中的一条直线。故u_*诱导出C到$\boldsymbol{P}^{g-1}$的一个映射。这个映射类似 Gauss 映射。由于

$$(u_*)_p=\varphi_K(p),$$

所以，从一定意义上说，典范映射是Abel-Jacobi 映射的微分。

习题4.1 设C是亏格为g的紧 Riemann 面，$2\leqslant d\leqslant g$。试证：对于$C^{(d)}$的通有的点D，有

$$\mathrm{rank}(u_*)_D=d.$$

提示 由于

$$\varphi_K: C\to \boldsymbol{P}^{g-1}$$

是非退化的，所以对$C^{(d)}$的通有的点$D=p_1+\cdots+p_d$，

$$\varphi_K(p_1), \cdots, \varphi_K(p_d)$$

占有最广位置。故

$$\dim \overline{\varphi_K(D)} = d-1.$$

由命题4.7，即有

$$\operatorname{rank} (u_*)_D = d.$$

习题4.2 设C是亏格为g的紧Riemann面，$1 \leqslant d \leqslant g$. 证明：

$$u: C^{(d)} \to W_d$$

对$C^{(d)}$的通有的点是单的，其中

$$W_d = u(C^{(d)}) \subset J(C).$$

提示 应用事实4.10。

习题4.3 设C是亏格为$g \geqslant 1$的紧Riemann面，$d \geqslant 1$. 考虑微分

$$(u_*)_D: T_D(C^{(d)}) \to T_{u(D)}(J(C)).$$

证明：对$C^{(d)}$的通有的点D，有

$$\ker (u_*)_D = T_D(|D|).$$

提示 对$1 \leqslant d \leqslant g$，利用习题4.1；若$d > g$，对$C^{(d)}$的通有的点$D$，有

$$\operatorname{rank} (u_*)_D = g.$$

故有结论。

习题4.4 设C是一个紧Riemann面，$D \in \operatorname{Div}(C)$. 如果

$$D \geqslant 0,$$

且

$$l(D) \neq 0, \qquad i(D) \neq 0,$$

则称D是一个**特殊因子**。试证明Clifford定理：设D是特殊因子，则

$$l(D) \leqslant \frac{1}{2} \deg D + 1.$$

提示 需要一个引理：设$D_1, D_2 \in \operatorname{Div}(C)$，$D_1, D_2 \geqslant 0$. 则

$$\dim |D_1| + \dim |D_2| \leqslant \dim |D_1 + D_2|.$$

证明如下：定义映射

$$\mu: |D_1| \oplus |D_2| \to |D_1 + D_2|,$$
$$(\tilde{D}_1, \tilde{D}_2) \mapsto \tilde{D}_1 + \tilde{D}_2.$$

由于 $|D_1 + D_2|$ 中任何一个因子表成两个有效因子的和的方式至多有 $2^{\deg(D_1+D_2)-1}$ 种，所以

$$\dim(\mathrm{Im}(\mu)) = \dim(|D_1| \oplus |D_2|).$$

故

$$\dim|D_1 + D_2| \geqslant \dim(\mathrm{Im}(\mu)) = \dim|D_1| + \dim|D_2|.$$

现设 $\omega \in \Omega^1(D)$，$\deg D = d$。则

$$\begin{aligned} l(D) + i(D) &= l(D) + l((\omega) - D) = \dim|D| \\ &\quad + \dim|(\omega) - D| + 2 \leqslant \dim|(\omega)| + 2 \\ &= l((\omega)) + 1 = i(0) + 1 \\ &= \dim\Omega^1(C) + 1 = g + 1. \end{aligned}$$

再由Riemann-Roch定理 $l(D) - i(D) = d - g + 1$。故

$$2l(D) \leqslant d + 2.$$

习题4.5 考察超椭圆的紧 Riemann 面，证明 Clifford 定理中的等号可以达到。

提示 设 $\pi: C \to \boldsymbol{P}^1$ 是双叶覆盖，p 为 π 的一个分歧点。取 $D = 2kp$。定义

$$f(\ ) = \frac{1}{\pi(\ ) - \pi(p)} \in K(C).$$

则 $(f)_\infty = 2p$。故

$$f^r \in \mathscr{L}(D) \quad (r = 0, 1, \cdots, k).$$

但 $1, f, \cdots, f^k$ 线性无关，故有

$$l(D) \geqslant k + 1. \qquad (*)$$

另一方面，由 Riemann-Roch 定理，

$$i(D) = l(D) - 2k + g - 1 \geqslant g - k,$$

故当 $k \leqslant g - 1$ 时，$i(D) > 0$。所以，当 $0 \leqslant k \leqslant g - 1$ 时，D 为特殊因子。此时，由(*)式即有结论。

习题4.6 对亏格为4的紧Riemann面C，考虑

$$u: C^{(3)} \to J(C),$$

试对于所有的$D \in C^{(3)}$，决定$u^{-1}(u(D))$。

提示 $u^{-1}(u(D)) = |D|$。对D是$C^{(3)}$上通有的点，有

$$|D| = D.$$

否则，$\dim|D| \geqslant 1$，即$l(D) \geqslant 2$。由Riemann-Roch定理

$$2 \leqslant l(D) = 3 - 4 + 1 + i(D) = i(D),$$

故D为特殊因子。由Clifford定理，

$$l(D) \leqslant \frac{3}{2} + 1,$$

故$l(D) = 2$。所以$\dim|D| = 1$。故若$|D| \neq D$，则

$$|D| = \{D + (f + \lambda) \mid \lambda \in \boldsymbol{P}^1\},$$

其中f为$\mathscr{L}(D)$中非常值函数($\lambda = \infty$意味着$(f+\lambda) = 0 \in \mathrm{Div}(C)$)。

以下分两种情形给出$\dim|D| = 1$的条件，并且估计这样的$|D|$的个数。设$D = p_1 + p_2 + p_3$。

a) 当C是超椭圆的。可以断言

$\dim|D| = 1 \iff p_1, p_2, p_3$中有两个是$\boldsymbol{P}^1$中某点在$\pi$下的原象，

其中π是由C到$\boldsymbol{P}^1$的双叶覆盖。

首先，可证$(f)_\infty \neq D$。否则，考虑

$$g(\ ) = \frac{1}{\pi(\ ) - \pi(p_1)} \in K(C),$$

则$(g)_\infty = p_1 + p_4$ ($p_4 \in C$，p_4是$\pi(p_1)$在π下的另一原象)。令

$$\tilde{D} = 2p_1 + p_2 + p_3 + p_4.$$

则$1, f, g, fg \in \mathscr{L}(\tilde{D})$，且线性无关。于是$l(\tilde{D}) \geqslant 4$。由Riemann-Roch定理，即知

$$i(\tilde{D}) \geqslant 2.$$

$\tilde{D}$为特殊因子。由 Clifford 定理，有

$$l(\tilde{D})\leqslant\frac{5}{2}+1,$$

$l(\tilde{D})\geqslant 4$ 矛盾。故 $\deg(f)_\infty=2$。

无妨设$(f)_\infty=p_1+p_2$，取 g 如前（若

$$(f)_\infty=p_2+p_3 \text{ 或 } (f)_\infty=p_1+p_3,$$

取 $g=1/(\pi(\ )-\pi(p_3))$。类似$(f)_\infty\neq D$的证明，可知

$$f=\mu g+\gamma,$$

其中$\mu,\gamma\in \boldsymbol{C}$，$\mu\neq 0$(否则将仍然导致 $l(\tilde{D})\geqslant 4$，而产生矛盾)。故 p_1,p_2 是 $\pi(p_1)$在 π 下的两个原象。这就证明了断言中的"$\Longrightarrow$"。

反之，设p_1,p_2是$\boldsymbol{P}^1$中某点在 π 下的两个原象，则对任一 $\lambda\in \boldsymbol{P}^1$，都有

$$D+(g+\lambda)=p_3+\pi^{-1}\left(\pi(p_1)-\frac{1}{\lambda}\right)\in|D|.$$

故$\dim|D|=1$。断言证完。

上述论证亦指出：$C^{(3)}$中共有∞^1个不同的D，使得

$$\dim|D|=1.$$

它们形如

$$\{p+\pi^{-1}(\lambda)\,|\,\lambda\in \boldsymbol{P}^1\},$$

其中 $p\in C$。

b) C 是非超椭圆的。将C视为$\boldsymbol{P}^3$中的典范曲线，则

$$C=Q\cap V,$$

其中 Q,V 是 $\boldsymbol{P}^3$ 中的曲面，

$$\deg Q=2,\quad \deg V=3.$$

Q可由一族直母线组成(见测验题Ⅱ的第 8 题)。可以断言

$$\dim|D|=1\iff p_1,p_2,p_3\text{在 }Q\text{ 的某条直母线上}.$$

事实上，设 $\dim|D|=1$，则 $i(D)=2$。故可选择 $\Omega^1(C)$的基 $\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3$，使得 $\omega_0,\omega_1\in\Omega^1(D)$。在$\Omega^1(C)$的这组基下将 C 映成

P^3中的典范曲线，则

$$D \subset L = \{\xi^0 = 0\} \cap \{\xi^1 = 0\}.$$

故$\#\{L \cap C\} \geqslant 3$(重数计算在内)，更有$\#\{L \cap Q\} \geqslant 3$。但

$$\deg Q = 2,$$

故$L \subset Q$。即有断言中的"$\Longrightarrow$"。

反之，设L为Q上一直线，$D \subset L$。则

$$D \subset L \cap C.$$

由于$\deg V = 3$，故

$$\#\{L \cap C\} = \#\{L \cap Q \cap V\} = \#\{L \cap V\} = 3.$$

所以$D = L \cap C$。设

$$L = \left\{\sum_{i=0}^{3} \lambda_i \xi^i = 0\right\} \cap \left\{\sum_{i=0}^{3} \eta_i \xi^i = 0\right\},$$

则

$$\theta_1 = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i \omega_i \quad 和 \quad \theta_2 = \sum_{i=0}^{3} \eta_i \omega_i$$

都属于$\Omega^1(D)$，故$i(D) \geqslant 2$。由Riemann-Roch定理及Clifford定理可知

$$i(D) = 2.$$

故$l(D) = 2$，所以$\dim|D| = 1$。断言证完。

当Q光滑时，Q上有两个单参数直线族(参数在P^1中)。故此时有两个$|D|$，使得

$$\dim|D| = 1.$$

当Q奇异时，Q上只有一个单参数直线族，故此时只有一个$|D|$，使得

$$\dim|D| = 1.$$

§5 Abel定理的应用

本节的主要内容是对椭圆曲线和椭圆积分做一些初步的讨

论。在这之前，我们先给出有关亏格为3的非超椭圆的紧Riemann面的超平面截口的一个有趣的事实，然后考察亏格为1的紧Riemann面的全纯等价分类问题。

设C是一个亏格为3的非超椭圆的紧Riemann面。我们把C和它在典范映射下的象等同起来，则C是一条光滑的四次平面代数曲线。设L是C所在的射影平面$\boldsymbol{P}^2$中的一条直线，

$$D = L \cdot C = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \in C^{(4)}$$

是一个超平面截口。我将证明，对于$E \in C^{(4)}$，$u(E) = u(D)$的充分必要条件是

$$E = L' \cdot C,$$

即E也是一个超平面截口。

充分性。设$E = L' \cdot C$。设L与L'的方程分别为$l = 0$及$l' = 0$。令

$$f = \frac{l'}{l}\bigg|_C \in K(C),$$

则$(f) = E - D$。由命题1.6，就有$u(D) = u(E)$。

必要性。若$u(D) = u(E)$，我们希望证明

$$E = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

也是一个超平面截口。设$\overline{q_1 q_2} = L'$，则

$$L' \cdot C = q_1 + q_2 + q' + q''.$$

如果$L' \cdot C \neq E$，则

$$q_3 + q_4 - q_1' - q_2'' \neq 0.$$

而$u(E) = u(D)$意味着$u(E) = u(L' \cdot C)$（因为D与$L' \cdot C$都是超平面截口，故$u(D) = u(L' \cdot C)$），即

$$u(q_3 + q_4 - q' - q'') = 0.$$

由命题1.7，存在$f \in K(C)$，使得

$$(f) = q_3 + q_4 - q_1' - q_2''.$$

视f为C到$\boldsymbol{P}^1$的全纯映射，则f的次数为1或2。这意味着C是Riemann球面或是超椭圆的，与C是亏格为3的非超椭圆的矛盾。

这就证明了

$$E = L' \cdot C。$$

这个事实说明，对于亏格为 3 的典范曲线的超平面截口 D，

$$|D| \cong \boldsymbol{P}^2。$$

下面，我们考察 $g=1$ 的紧 Riemann 面的全纯等价分类问题。

定理5.1 亏格为 1 的紧 Riemann 面与它的 Jacobi 簇 $J(C)$ 是双全纯等价的，即

$$C \cong J(C)。$$

如果采用正规化周期矩阵

$$\Pi = (\ 1 \quad z\ )_{1\times 2},$$

我们有 $C \cong \boldsymbol{C}/\Lambda$，其中 Λ 是由 1 和 z 生成的格。

证明 由 Jacobi 反演定理(强形式)及前一节末尾对 $d=1$ 的情形的说明，有

$$u: C \to J(C)$$

是双全纯映射。▌

进一步地，我们有：

定理5.2 设 $C = \boldsymbol{C}/\Lambda$，$C' = \boldsymbol{C}/\Lambda'$，其中

$$\Lambda = \{m + nz \mid m, n \in \boldsymbol{Z}\}, \qquad \operatorname{Im} z > 0,$$

$$\Lambda' = \{m + nz' \mid m, n \in \boldsymbol{Z}\}, \qquad \operatorname{Im} z' > 0。$$

则 $C \cong C'$ 的充分必要条件是

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta},$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \boldsymbol{Z}$，且 $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$。

证明 必要性。设

$$\pi: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}/\Lambda = C$$

和

$$\pi': \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}/\Lambda' = C'$$

分别是到商空间的自然投影。由投影 π 和 π'，$\boldsymbol{C} \to C$ 和 $\boldsymbol{C} \to C'$ 成

用覆盖空间。根据通用覆盖空间的理论(例如参看 S. Massey gebraic Topology》或者 L. Ahlfors《Riemann Surfaces》),
全纯映射

$$\varphi: C \to C'$$

提升为全纯映射

$$F: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C},$$

得下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{C} & \xrightarrow{F} & \boldsymbol{C} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ C & \xrightarrow[\varphi]{} & C' \end{array}$$

注意,通常拓扑上关于通用覆盖空间的理论,只能保证提升后的射是连续映射。但在我们这里,F 在每一局部恰好是 φ 的局部示,因而 F 是全纯的。)

现在我们设 φ 是双全纯的,它的提升 F 也是双全纯的,即 F Aut$(\boldsymbol{P}^1)$。因而 F 是一个线性分式变换。又由于 F 保持∞不动所以

$$F(t) = at + b \quad (t \in \boldsymbol{C}).$$

借助平移,可以假定 $b = 0$。由于 F 将 Λ 变成 Λ',故存在 $\alpha, \beta,$ $\gamma, \delta \in \boldsymbol{Z}$,使得

$$F(z) = \alpha z' + \beta,$$

$$F(1) = \gamma z' + \delta.$$

但又有 $F(z) = az$,$F(1) = a$,故

$$z = \frac{F(z)}{F(1)} = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}.$$

由于 F 是双全纯的,所以矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

可逆，即

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

再由 $\operatorname{Im} z > 0$， $\operatorname{Im} z' > 0$，且

$$\operatorname{Im} z = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{|\gamma z' + \delta|^2} \operatorname{Im} z',$$

即知 $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$。所以

$$\alpha o - \beta\gamma = 1.$$

必要性证完。

充分性。设

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \boldsymbol{Z}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

将 $F(z) = \alpha z' + \beta$， $F(1) = \gamma z' + \beta$ 进行实系数线性扩充，我们得到映射

$$F: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}.$$

易验证 F 是双全纯的，且 $F(\Lambda) = \Lambda'$。因而 F 诱导出从 $C = \boldsymbol{C}/\Lambda$ 到 $C' = \boldsymbol{C}/\Lambda'$ 的双全纯映射 φ，使得以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{C} & \xrightarrow{F} & \boldsymbol{C} \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ C & \xrightarrow[\varphi]{} & C' \end{array}$$

这就证明了

$$C \cong C'.$$

充分性证完。 ▌

由定理 5.1 和定理 5.2，亏格为 1 的紧 Riemann 面的全纯等价分类问题就完全解决了。

现在，我们对椭圆曲线和椭圆积分做些介绍。

在微积分学的早期工作中，人们花费了很大的精力去研究如

下形式的积分

$$\int R(x, y) dx,$$

其中 R 是 x, y 的有理函数，y 是 x 的代数函数(即 x 和 y 满足一个代数方程 $f(x, y) = 0$)。利用代数曲线的几何理论，我们可以为这些研究提供一些方法。事实上，我们可以把 $R(x, y) dx$ 看作是 P^2 上的一个微分1-形式。如果以 C' 表示 $f(x, y) = 0$ 所决定的 P^2 中的代数曲线，则我们所要考虑的积分就是沿代数曲线 C' 的积分

$$\int_{C'} R(x, y) dx.$$

下面，我们假定 C' 是亏格 $g = 1$ 的光滑的代数曲线。

定义5.3 如果平面代数曲线 C' 的正则化 C 的亏格为 1，则称 C' 是一个**椭圆曲线**。

注意，我们这里将要讨论的是光滑的椭圆曲线，但是，并不是说所有的椭圆曲线都是光滑的。例如，四次方程

$$y^2(ax^2 + bx + c) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

所决定的曲线一般讲来有两个通常的二重点。由亏格公式，此曲线的正则化的亏格为

$$g = \frac{1}{2}(4-1)(4-2) - 2 = 1,$$

所以它是椭圆曲线，但不是光滑的。事实上，由亏格公式易知，光滑的椭圆曲线一定是三次曲线；反之，光滑的三次曲线也一定是椭圆的。

关于光滑的椭圆曲线的一个基本事实是：

定理5.4 任给一个光滑的椭圆曲线 C'，存在一个适当的坐标系，使得在这坐标系下，C' 的仿射方程为

$$f(x, y) = y^2 - p(x) = 0,$$

其中

$$p(x) = 4x^3 + ax + b$$

是无重根的三次多项式。

在证明本定理之前，我们需要进行一些准备工作。

定义5.5 假定 C' 是一个光滑的代数曲线，设 p 为 C' 上一点，L 是 C' 在 p 点的切线。如果

$$(L \cdot C')_p \geqslant 3,$$

则称 p 是 C' 的一个**拐点**。

定义5.6 对给定的代数曲线

$$C' = \{F(\xi^0, \xi^1, \xi^2) = 0\} \subset \boldsymbol{P}^2,$$

它的 Hesse 行列式定义为

$$H \stackrel{!}{=} \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\right)_{(i,j=0,1,2)}.$$

如果

$$\deg F = n \geqslant 2,$$

显然，$H \in S^{3(n-2)}$。这里 $S^{3(n-2)}$ 表示 $3(n-2)$ 次三元齐次多项式的集合。

引理5.7 设

$$C' = \{F(\xi^0, \xi^1, \xi^2) = 0\}$$

是一个次数 $n \geqslant 3$ 的光滑代数曲线。则 $p \in C'$ 是 C' 的一个拐点，当且仅当

$$F(p) = H(p) = 0,$$

这里 H 是 C' 的 Hesse 行列式。

注意，$F(p) = H(p) = 0$ 并不依赖于 $\boldsymbol{P}^2$ 的坐标系的选择。

证明 选择仿射坐标系，使得 p 是坐标原点，并且 C' 在 p 点的切线是 x 轴。在此坐标系中，曲线 C' 的仿射方程为

$$f(x, y) = y + f_2(x, y) + \cdots + f_n(x, y) = 0,$$

其中 $f_i (i = 2, \cdots, n)$ 为 i 次齐次多项式。设

$$f_2(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

由拐点的定义易知，p 是拐点当且仅当

$$a=0.$$

而在相应的射影坐标系中，C' 的方程为

$$F(\xi^0,\xi^1,\xi^2)=(\xi^0)^{n-1}\xi^2+(\xi^0)^{n-2}f_2(\xi^1,\xi^2)+\cdots+f_n(\xi^1,\xi^2)=0.$$

所以，F 在 $p=[1,0,0]$ 处的 Hesse 行列式为

$$H(p)=\det\begin{pmatrix}0 & 0 & n-1\\ 0 & 2a & 2\beta\\ n-1 & 2\beta & 2\gamma\end{pmatrix}=-2(n-1)^2a.$$

故 $p=[1,0,0]$ 是 C' 的拐点，当且仅当

$$F(p)=H(p)=0. \quad \blacksquare$$

根据 Bezout 定理，下面的定理是明显的。

定理5.8 一个 n 次光滑代数曲线 C' 的拐点的个数等于 $3n(n-2)$（重数考虑在内）。

推论5.9 一个光滑的椭圆曲线有 9 个拐点。

现在我们证明定理5.4。

定理5.4的证明 选择 P^2 的坐标系，使得 C' 的一个拐点

$$q=[0,0,1],$$

并且

$$L_\infty=\{\xi^0=0\}$$

是 C' 在 q 点的切线。由于 q 是拐点，所以 $F(0,\xi^1,1)$ 以 $\xi^1=0$ 为一个三重零点。故

$$F(\xi^0,\xi^1,\xi^2)=a(\xi^1)^3+\xi^0G(\xi^0,\xi^1,\xi^2),$$

其中 $a\neq0$，G 是二次齐次多项式。以一个适当的非零常数去乘 $F=0$，仍为 C' 的方程，故我们不妨假定 $a=-4$，即

$$F(\xi^0,\xi^1,\xi^2)=-4(\xi^1)^3+\xi^0G(\xi^0,\xi^1,\xi^2).$$

在相应的仿射坐标系中，曲线 C' 的方程为

$$f(x,y)=-4x^3+g(x,y),$$

其中

$$g(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2ax + 2by + c.$$

由于 C' 是光滑的，所以 $\gamma \neq 0$(否则$[0,0,1]$是 C' 的奇点)。借助变换

$$\begin{cases} x \longmapsto x, \\ y \longmapsto \lambda y \quad (\lambda^2 = \gamma), \end{cases}$$

我们可以假定 $\gamma = 1$。再由变换

$$\begin{cases} x \longmapsto x, \\ y \longmapsto y + \beta x + b, \end{cases}$$

可得到

$$g(x, y) = y^2 + h(x),$$

其中 h 的次数为 2。最后，用变换

$$\begin{cases} x \longmapsto x + \dfrac{\beta^2 - \alpha}{12}, \\ y \longmapsto y, \end{cases}$$

我们得到

$$f(x, y) = y^2 - (4x^3 + a'x + b').$$

容易看出，$4x^3 + a'x + b'$ 无重根。事实上，如果 z_0 是它的一个重根，则$[1, z_0, 0]$是 C' 的一个奇点，与 C' 的光滑性矛盾。∎

下面，当我们讲到光滑的椭圆曲线的时候，总认为已经选定如定理 5.4 中所述的坐标系，而这曲线由方程

$$f(x, y) = y^2 - (4x^3 + ax + b) = 0$$

给出。当我们讨论沿这条曲线积分时，总认为积分的起点是

$$q = [0, 0, 1].$$

注意，q 是此曲线的一个拐点，而且 $L_\infty = \{\xi^0 = 0\}$ 是此曲线在 q 点的切线。

对于光滑的椭圆曲线 C，我们可以把它和它的正则化等同起来。此时

$$\dim \Omega^1(C) = 1.$$

根据第四章命题 2.3 的证明，我们可以取

$$\omega=\frac{g(x,y)\mathrm{d}x}{f_y(x,y)} \quad (\deg g=n-3)$$

作为 $\Omega^1(C)$的基。但 $\deg g=3-3=0$，故可取

$$\omega=\frac{2\mathrm{d}x}{f_y}=\frac{\mathrm{d}x}{y}.$$

我们将要研究沿着曲线 C 的积分

$$u=\int_q^p \frac{\mathrm{d}x}{y}.$$

这种积分称为**椭圆积分**。研究椭圆积分的关键想法是Abel引入的关于椭圆积分的反演。Abel注意到，在研究椭圆积分时，会遇到类似于研究积分

$$u=\int_0^v \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin v$$

时出现的困难。对后一个积分，较好的办法是把 v 作为 u 的函数(即正弦函数)来研究。所以，Abel建议在研究椭圆积分时，也把 v 作为 u 的函数。这种函数称为**椭圆函数**。确切地说，由积分

$$u=\int_q^{(X,Y)} \frac{\mathrm{d}x}{y}$$

所定义的函数 $X=x(u), Y=y(u)$ 称为**椭圆函数**。根据 Abel 反演定理，$x(u), y(u)$在整个复平面 $\mathbf{C}$ 上有定义。$x(u), y(u)$有许多类似于三角函数的性质。

我们知道，由

$$u(p)=\int_q^p \frac{\mathrm{d}x}{y},$$

定义的 Abel-Jacobi 映射

$$u: C\to \mathbf{C}/\Lambda$$

是双全纯的，其中 Λ 是由周期向量

$$\omega_1 = \int_{\gamma_1} \frac{dx}{y}, \qquad \omega_2 = \int_{\gamma_2} \frac{dx}{y}$$

生成的格（γ_1, γ_2是 $H_1(C, \mathbf{Z})$的一组典范基的代表）。所以 $x(u)$和 $y(u)$都是以 ω_1和 ω_2为双周期的函数。此外，我们还有：

定理5.10 椭圆函数 $x(u), y(u)$具有以下性质

a) $x(-u) = x(u)$, $y(-u) = -y(u)$;

b) $x'(u) = y(u)$, $(x'(u))^2 = 4(x(u))^3 + ax(u) + b$;

c) $x(u_1 + u_2) = R(x(u_1), x(u_2), x'(u_1), x'(u_2))$，其中 R 是四个变元的有理函数。

（性质 c) 很类似于三角函数的加法定理。）

证明 a) 考虑从 C 到 x 轴的投影所诱导出的 C 的对合映射（见图5.4）：

$$j: C \to C,$$

$$(x, y) \mapsto (x, -y) \quad \text{（对有限点），}$$

$$q \mapsto q \quad \text{（对无穷远点）。}$$

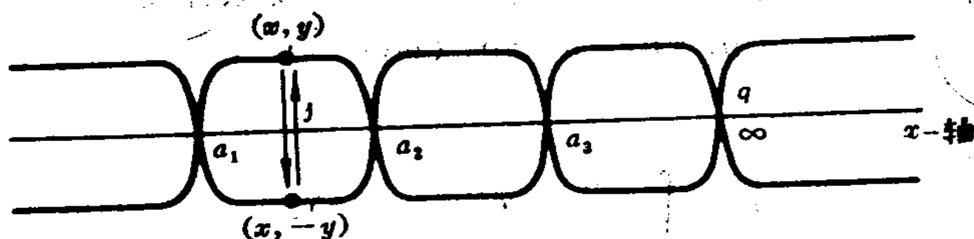


图 5.4

我们有

$$j^*\left(\frac{dx}{y}\right) = -\frac{dx}{y}.$$

所以

$$\int_q^{(x(-u),y(-u))}\frac{dx}{y}=-u=-\int_q^{(x(u),y(u))}\frac{dx}{y}$$

$$=\int_q^{(x(u),y(u))} j^*\left(\frac{dx}{y}\right)=\int_q^{j(x(u),y(u))}\frac{dx}{y}$$

$$=\int_q^{(x(u),-y(u))}\frac{dx}{y}.$$

由于此时 Abel-Jacobi 映射是单一的，所以

$$x(-u)=x(u),\qquad y(-u)=-y(u).$$

b) 根据定义，

$$du=\frac{dx}{y}=\frac{dx(u)}{y(u)}=\frac{x'(u)}{y(u)}du,$$

故 $x'(u)=y(u)$。但

$$y^2=4x^3+ax+b,$$

所以

$$(x'(u))^2=4(x(u))^3+ax(u)+b.$$

为了证明 c)，我们还需要用到另一个有趣的事实：

定理5.11 $p_1,p_2,p_3\in C$ 共线的充分必要条件是

$$u_1+u_2+u_3\equiv 0 \pmod{\Lambda},$$

其中

$$u_i=\int_q^{p_i}\frac{dx}{y}\quad(i=1,2,3).$$

证明 必要性。设 p_1,p_2,p_3 都在直线 $L=\{l(\xi)=0\}$ 上，其中 l 是 ξ^0,ξ^1,ξ^2 的一次齐次多项式。无妨假定 L 不与 $L_\infty=\{\xi^0=0\}$ 重合(否则 $p_1=p_2=p_3=q$，结论显然)。令

$$g=\left.\frac{l(\xi^0,\xi^1,\xi^2)}{\xi^0}\right|_C.$$

则 g 是 C 上的一个半纯函数，而且

$$(g)=p_1+p_2+p_3-3q.$$

由 Abel 定理，即有

$$\sum_{i=1}^{3}\int_q^{p_i}\frac{\mathrm{d}x}{y}\equiv 0 \pmod{\Lambda},$$

即

$$u_1+u_2+u_3\equiv 0 \pmod{\Lambda}.$$

充分性。设 $\overline{p_1p_2}\cap C=p_1+p_2+p'$。由前面所证的本定理的必要性，有

$$u_1+u_2+u'\equiv 0 \pmod{\Lambda},$$

其中

$$u'=\int_q^{p'}\frac{\mathrm{d}x}{y}.$$

由此，我们得到

$$u_3\equiv u' \pmod{\Lambda}.$$

又由于

$$u: C\to C/\Lambda$$

是单一映射，所以 $p_3=p'$。即 p_1,p_2,p_3 共线。▌

作为定理5.11的推论，我们有

推论5.12 光滑的椭圆曲线 C 有 9 个不同的拐点，而且通过其中任意两个的直线一定经过第三个拐点。

证明 $p\in C$ 是 C 的一个不等于 q 的拐点，当且仅当

$$L\cdot C=3p,$$

其中 $L=\{l(\xi)=0\}$ 是 C 在 p 点的切线。考虑

$$g=\left.\frac{l(\xi^0,\xi^1,\xi^2)}{\xi^0}\right|_C,$$

我们有

$$(g)=3p-3q.$$

由 Abel 定理，注意到 $u(q)\equiv 0 \pmod{\Lambda}$，就有

$$3u(p)=3\int_q^p \frac{\mathrm{d}x}{y}\equiv 0 \pmod{\Lambda}.$$

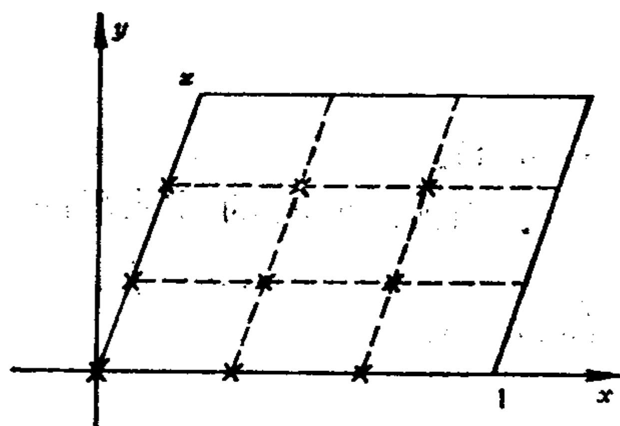


图 5.5

所以，$p\in C$ 是 C 的一个拐点，当且仅当 $u(p)\in\Lambda/3$。由于 u 是单一映射，所以 C 上有 9 个不同的拐点。这些拐点在 u 下的象如图 5.5 所示。

现在证明本推论的另一部分结论。设 p_1, p_2 是 C 的两个拐点，再设

$$\overline{p_1p_2}\cap C=p_1+p_2+p_3.$$

我们将证 p_3 也是 C 的拐点。根据定理 5.11，有

$$u_1+u_2+u_3\equiv 0 \pmod{\Lambda},$$

其中

$$u_i=\int_q^{p_i}\frac{\mathrm{d}x}{y}\quad (i=1,2,3).$$

上边的同余式两端乘 3，有

$$3u_1+3u_2+3u_3\equiv 0 \pmod{\Lambda}.$$

由于p_1, p_2都是拐点，所以 $3u_1\equiv 3u_2\equiv 0 \pmod{\Lambda}$。故

$$3u_3\equiv 0 \pmod{\Lambda}.$$

而这就意味着p_3是 C 的拐点。 ▌

下面，我们来证明定理 5.10 的 c)。

设 $u_3=u_1+u_2$，则

$$u_3-u_1-u_2\equiv 0 \pmod{\Lambda}.$$

由定理5.11，即知

$$(x(-u_1), y(-u_1)),\ (x(-u_2), y(-u_2)),\ (x(u_3), y(u_3))$$

三点共线。所以 $x=x(u_3)$和 $y=y(u_3)$满足方程组

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & x(u_1) & -x'(u_1) \\ 1 & x(u_2) & -x'(u_2) \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0, \\ y^2 = 4x^3 + ax + b. \end{cases}$$

(注意，在建立上面第一个方程时，应用了本定理的 a)和 b).)
消去上面方程组中的 y，得到

$$4x^3 - \left[\frac{x'(u_1) - x'(u_2)}{x(u_1) - x(u_2)}\right]^2 x^2 + Ax + B = 0.$$

注意到 $x(u_1), x(u_2), x(u_3)$ 是这个方程的三个根，即知

$$x(u_3) + x(u_1) + x(u_2) = \frac{1}{4}\left[\frac{x'(u_1) - x'(u_2)}{x(u_1) - x(u_2)}\right]^2.$$

所以有

$$x(u_1 + u_2) = -x(u_1) - x(u_2) + \frac{1}{4}\left[\frac{x'(u_1) - x'(u_2)}{x(u_1) - x(u_2)}\right]^2. \quad \blacksquare$$

事实上，满足定理5.10的三条性质的双周期函数就是所谓 Weierstrass 椭圆函数。只不过我们在这里是用代数几何的方法研究了它们。

测验题一

（第一、二章）

1. 设$\zeta=[\zeta^0,\cdots,\zeta^n]$表示$P^nC$中点的齐次坐标，$P^nC$中的二次曲面由方程

$$Q(\zeta)=\sum Q_{ij}\zeta^i\zeta^j=0$$

给出。两个二次曲面Q_1,Q_2称为是彼此独立的，如果不存在线性关系

$$\lambda_1Q_1(\zeta)+\lambda_2Q_2(\zeta)=0,\qquad \forall\zeta\in P^n$$

$$(\lambda_1,\lambda_2\in C,\quad |\lambda_1|+|\lambda_2|\neq 0).$$

设$\Lambda=\{m_1w_1+m_2w_2\,|\,m_1,m_2\in Z\}$是$P^2C$中一个格，又设

$$\mathscr{P}(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in\Lambda\setminus\{O\}}\left[\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right]$$

是Weierstrass $\mathscr{P}$函数。考虑全纯映射

$$f:\ C\to P^3C,$$

$$z\ \mapsto[1,\mathscr{P}(z),\mathscr{P}'(z),\mathscr{P}''(z)]$$

（这可视为从$C=C/\Lambda$到P^3C的全纯映射）。

a) 在$z=0$邻近以局部全纯坐标表出f；

b) 试证：f的象落在两彼此独立的二次曲面的交集上。

2. 考虑由齐次坐标给出的映射$f:\ P^2C\to P^5C$，

$$f([\xi^0,\xi^1,\xi^2])=[(\xi^0)^2,\xi^0\xi^1,\xi^0\xi^2,(\xi^1)^2,\xi^1\xi^2,(\xi^2)^2],$$

试证：

a) 映射f的定义是确切的；

b) f是全纯的，并且一对一地映到其象集；

c) f的象$f(P^2C)\subset P^5C$可以用一些二次方程给出。

注记 象集$f(P^2C)\subset P^5C$是一个非常著名的代数曲面——

Veronese 曲面。

3. 如果 k 次代数曲线 $C\subset P^2\mathbf{C}$ 具有 k 重点 p，那么 C 由通过 p 点的 k 条直线(可以是相同的)组成。

4. 对 μ 的哪些值(包括 $\mu=\infty$)下列曲线有奇点？

a) $x^3+y^3+z^3+\mu(x+y+z)^3=0$;

b) $x^3+y^3+z^3+3\mu xyz=0$。

试决定这些奇点的类型(是几重点，是否为通常重点)。

说明：所谓 $\mu=\infty$，是说以 $1/\mu$ 乘方程两端然后令 $\mu\to\infty$ 取极限。

5. 计算两曲线在(0,0)点的相交数：

a) (1) $x^3-x^2+y^2=0$, (2) $y^2-x^3=0$;

b) (1) $(y-x)^3-4\sqrt{2}\,xy=0$, (2) $y^2-x^3=0$。

说明：曲线 b)的(1)是由曲线 a)的(1)旋转45°得到的。

测验题二

(第三、四、五章)

第一部分 初等问题

1. 设 $C\subset P^2\mathbf{C}$ 是光滑平面代数曲线，E,F 是平面三次曲线，并且

$$E\cdot C=\sum_{i=1}^{9}p_i\in \mathrm{Div}(C)$$

(p_i 可以相同)。如果 F 通过 $p_1,\cdots,p_9$ 中的 8 个点，试证它也通过剩下的一个点(即作为 C 上的因子 $F\cdot C=E\cdot C$)。

注记 由于 $\dim S^3=10$，我们可以解释这一结果为：9 个线性函数

$$F\longmapsto F(p_i)\quad (F\in S^3)$$
$$(i=1,2,\cdots,9)$$

不是独立的。

2. a) 试证：每一亏格为 2 的曲线可表现为具有一个二重点的平面四次曲线；

b) 设 d 次不可约代数曲线 $C\subset P^2\mathbf{C}$ 具有 $(d-2)$ 重点，试证它是超椭圆曲线(即 C 的正则化是超椭圆的)。

3. a) 设 $p_i(i=1,\cdots,9)$ 是 9 个不同的点，如果通过其中任两点的直线一定还通过另一个点，试证在适当的坐标系中这些点可以表示为

$$[0,1,-1],\ [-1,0,1],\ [1,-1,0],$$
$$[0,1,\alpha],\ [\alpha,0,1],\ [1,\alpha,0],$$
$$[0,1,\beta],\ [\beta,0,1],\ [1,\beta,0],$$

这里 α, β 是 $x^2-x+1=0$ 的两个根。

b）试证：通过 a)中给出的 9 个点的三次曲线具有形式

$$x^3+y^3+z^3+3mxyz=0,$$

这三次曲线具有奇点当且仅当 $m=\infty, -1, \alpha, \beta$，并且在这些情形它成为三条直线。

附注 在 $m \neq \infty, -1, \alpha, \beta$ 时，这三次曲线是光滑的，并且 $p_i(i=1,\cdots,9)$是它的 9 个拐点。

第二部分　关于 Abel 定理的问题

4． 设 $\Lambda=\{m_1a_1+m_2a_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbf{Z}\}$ 是 $\mathbf{C}$ 中的一个格，$C=\mathbf{C}/\Lambda$。考虑 C 上的点

$$\begin{cases} p_i=[w_i], \\ q_i=[w_i'] \end{cases} \quad (i=1,\cdots,n),$$

这里$[w]$表示 w 所在的等价类。试利用 Abel定理证明以下命题：

存在 $f \in K(C)$使得

$$(f)=\sum_{i=1}^{n} p_i-\sum_{i=1}^{n} q_i \in \operatorname{Div}(C)$$

的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \equiv \sum_{i=1}^{n} w_i' \pmod{\Lambda},$$

这里求和号表示复数的加法。

注记 这结果通常在深入的复变函数论教科书中给出，你将做出的证明是代数几何式的。

5． 设C是一个亏格 $g \geqslant 1$的紧 Riemann 面，考虑

$$u(C) \subset J(C).$$

我们说 $u(C)$是**对称**的，如果

$$u(C)=-u(C).$$

试证：$u(C)$为对称的充分必要条件是C为超椭圆的。

第三部分 关于 Riemann-Roch 定理的问题

6. a) 设 $C \subset P^4\mathbf{C}$ 是亏格为 5 的典范曲线，试证 C 落在至少三个线性无关的二次曲面 Q_1, Q_2, Q_3 之上。

b) 设 C 是亏格 $g = 5$ 的非超椭圆曲线。如果存在映射

$$f: C \to P^1\mathbf{C} \quad (\deg f = 3),$$

则称 C 是三点式的。这时置

$$f^{-1}(t) = D_t = (p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)) \in \mathrm{Div}(C),$$

试证：这三点在典范映射下的象

$$\varphi_K(p_1(t)), \quad \varphi_K(p_2(t)), \quad \varphi_K(p_3(t))$$

总是共线的(即这三点位于一条直线 $L_t \subset P^4\mathbf{C}$ 之上)。

提示 计算 $\dim K^1(-D_t)$ 并解释所得之结果。

c) 试证：如果 C 是三点式的，那么所有的直线 L_t 包含在 Q_1, Q_2, Q_3 之中，特别地

$$\varphi_K(C) \neq Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3.$$

注记 由 ∞^1 条直线(即单参数直线族)

$$L_t \subset P^4\mathbf{C}$$

织成一曲面 S，可以证明

$$Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = S.$$

此外，还可以证明

$$C \text{ 是非三点式的} \Longrightarrow Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \varphi_K(C).$$

这样，一般的亏格为 5 的典范曲线总是三个二次曲面的交集。

7. 设 $C \subset P^{g-1}\mathbf{C}$ 是一条亏格为 g，次数为 $2g-2$ 的非退化光滑曲线。试证：C 是一条典范曲线。

提示 设 D 是一个次数为 $2g-2$ 的有效因子，

$$l(D) \geqslant g.$$

试证：必有 $w \in \Omega^1(D)$，使

$$D = (w),$$

然后，利用这一结果于 C 的超平面截口。

注记　任何光滑的四次平面代数曲线(这时$2g-2=4$)具有亏格$g=3$，因而任意光滑的四次平面曲线是典范曲线。

8. a) 考虑由齐次坐标给出的映射

$$\boldsymbol{P}^1\times\boldsymbol{P}^1\to\boldsymbol{P}^3,$$

$$[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]\mapsto[x_0y_0,x_0y_1,x_1y_0,x_1y_1]$$

$$(\boldsymbol{P}^1=P^1\boldsymbol{C},\quad \boldsymbol{P}^3=P^3\boldsymbol{C}),$$

试证：这映射的象是一光滑的二次曲面$Q\subset\boldsymbol{P}^3$，并且映射

$$\boldsymbol{P}^1\times\boldsymbol{P}^1\to Q$$

是双全纯的。

b) $\boldsymbol{P}^1\times\boldsymbol{P}^1$中的曲线$\boldsymbol{P}^1\times\{$点$\}$和$\{$点$\}\times\boldsymbol{P}^1$的象都在$Q$上，因而$Q$包含了两族单参数直线族(每族有$\infty^1$条直线)。

附注　由a),b)得知，这两个单参数直线族中任意一族都是生成Q的母线族。

c) 试证：一般的亏格为4的曲线恰有两个不同的三点式映射(参看题6)。

提示　证明$\varphi_K(C)=Q\cap V$，这里V是一个三次曲面，然后，利用$Q\cong\boldsymbol{P}^1\times\boldsymbol{P}^1$解释这一事实。

附录：关于“一般事实”的讨论

在正文中，我们用到了以下的定理。

存在定理 设C是一个紧 Riemann 面，那么存在一个浸入

$$f: C \to P^2$$

使得$f(C)$至多只有通常二重点。

所谓f是一个浸入是说f的微分处处都不为零。所谓$f(C)$至多只有通常二重点，意味着以下两件事：

a) 对任意一点$p \in f(C)$，至多只有C中的两个点映到p；

b) 如果

$$f^{-1}(p) = \{p_1, p_2\},$$

那么过p点的$f(C)$的两曲线支具有不同的切线。这就是说，两曲线支在交点处应该具有图 A 的形状，而不应如图 B 所示的那样。

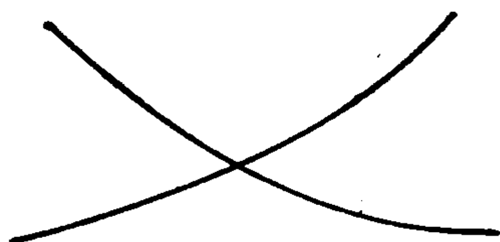


图 A　通常二重点

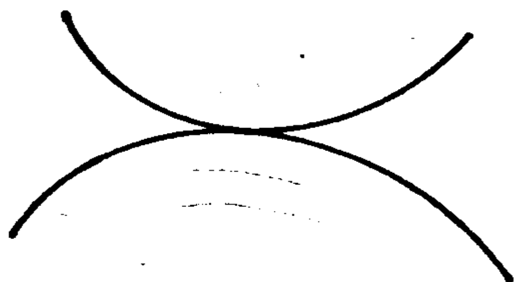


图 B(a)　非通常二重点

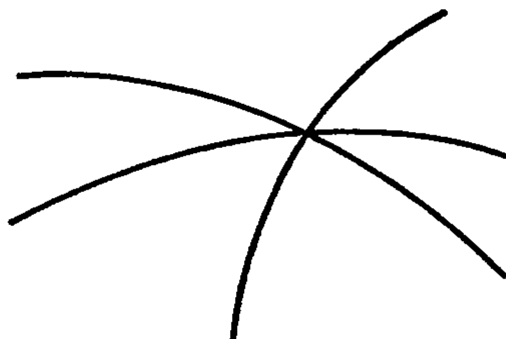


图 B(b)　多于二重的重点

我们指出：上面所陈述的存在定理是以下定理的一个推论。

第二存在定理 存在全纯映射

$$f: C \to P^n,$$

它是一对一的并且具有不为0的微分。

事实上，如果在第二存在定理中的$n>3$，我们总可以选择从P^n到它的适当的$n-1$维子空间($\cong P^{n-1}$)的投影p，使得

$$p \circ f: C \to P^{n-1}$$

是一对一的，并且具有不为0的微分。如果$n=3$，我们可以选择从P^3到它的适当子空间($\cong P^2$)的投影q，使得

$$q \circ f: C \to P^2$$

满足第一存在定理中(对f)的要求。

下面，我们对第二存在定理进行讨论(不是证明)。

我们指出，这定理实际上是本书中另一结果的形式不同的一种陈述。基本的困难在于：给定一个抽象的紧 Riemann 面C，我们并不能事先断定C上是否存在有非常数的半纯函数。因此，这问题必然涉及到某些非平凡的分析。

如果能证明以下结果，我们就能证明第二存在定理。

(*) 存在一个有限维子空间

$$V \subset K(C),$$

它具有以下三条性质：

a) 常函数$1 \in V$；

b) 对任意一对不同的点$p_1, p_2 \in C$，存在$f \in K(C)$使得

$$f(p_1) \neq f(p_2);$$

c) 对任意$p \in C$，存在$f \in K(C)$使得$f(p)=0$，而

$$(df)_p \neq 0.$$

事实上，如果$f_0=1, f_1, \cdots, f_n$是V的一组基，那么利用本书中的讨论不难看出，由

$$f(p) = [f_0(p), f_1(p), \cdots, f_n(p)]$$

给出的映射

$$f_1: C \to P^n$$

满足第二存在定理的条件。

以下我们讨论怎样证明非常数半纯函数的存在性。这讨论的进一步精密化能使我们得到(*)。从下面的讨论可以看到，在这种或那种形式下，层论和上同调将不可避免地在问题中出现。因此，我们假定读者在某种程度上对有关材料有所了解。(这些材料可以从伍鸿熙等著的《紧黎曼曲面引论》一书中找到。)

设$D=p_1+\cdots+p_d$是C上的一个因子，z_i是p_i邻近的一个局部全纯坐标。在p_i点邻近，任意函数$f\in\mathscr{L}(D)$具有以下形式

$$f=\frac{a_i}{z_i}+h(z_i),$$

这里$h(z_i)$是全纯函数。考虑由

$$f\mapsto(a_1,\cdots,a_d)$$

给出的线性映射

$$\mathscr{L}(D)\xrightarrow{\lambda}\mathbf{C}^d,$$

这线性映射以常函数的集合$\mathbf{C}$为核(Kernel)。因此，我们有正合列

$$0\longrightarrow\mathbf{C}\longrightarrow\mathscr{L}(D)\xrightarrow{\lambda}\mathbf{C}^d, \tag{1}$$

由此可得

$$\dim\mathscr{L}(D)=d+1-\dim(\operatorname{coker}\lambda). \tag{2}$$

这样，求$\dim\mathscr{L}(D)$的问题等价于求$\dim(\operatorname{coker}\lambda)$。特别地，假定我们能把(1)延长为向量空间的正合列：

$$0\to\mathbf{C}\to\mathscr{L}(D)\xrightarrow{\lambda}\mathbf{C}^d\to H^1(C,\mathscr{O}), \tag{3}$$

并且有

$$\left.\begin{array}{ll}\text{a)} & H^1(C,\mathscr{O})\text{不依赖于}D;\\ \text{b)} & \dim H^1(C,\mathscr{O})<+\infty,\end{array}\right\} \tag{4}$$

那么由(2)就得到

$$\dim \mathscr{L}(D) \geqslant d+1-\dim H^1(C,\mathscr{O}), \tag{5}$$

因而当$d \to +\infty$时，

$$\dim \mathscr{L}(D) \to +\infty.$$

用这样的方法，我们将能证明非常数半纯函数的存在性。

而(3)和(4)中的a)是层的上同调的形式化的理论的推论。如果令

$\mathscr{O}=C$上全纯函数的层；

$\mathscr{O}(D)=C$上极点不劣于D的半纯函数的层；

$\mathscr{O}(D)/\mathscr{O}=\mathscr{O}(D)$模$\mathscr{O}$的商层，

那么我们有层的正合列

$$0 \to \mathscr{O} \to \mathscr{O}(D) \to \mathscr{O}(D)/\mathscr{O} \to 0. \tag{6}$$

由于

$$H^0(C,\mathscr{O})=\mathbf{C}, \quad H^0(C,\mathscr{O}(D))=\mathscr{L}(D),$$

以及

$$H^0(C,\mathscr{O}(D)/\mathscr{O})=\mathbf{C}^d,$$

我们看到(3)是(6)的上同调长正合列的前4项。换句话说，不管人们是否喜欢，层和上同调的形式化的理论自然而然地出现于复流形和代数几何的研究中。对于一个学生来说，困难之点在于学会这一套方法而又不迷失几何的直观。

至于(4)中的b)，这是一个基本的解析事实：对于紧复流形上的凝聚层(coherent sheaf)，其上同调是有限维的(参看前引伍鸿熙等著的书)。我们这里不再进一步讨论，只是指出：这结果归根结底是由全纯函数的正规族性质(Montel)及C的紧致性所致。

汉英名词对照

（按汉语拼音顺序）

K

L

N

P

Q

S

T

W

X

Y

Z